MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Pauta Auxiliar 9
11 de Mayo

P1. Expanda en series de potencias la función $f(z) := \dfrac{1}{1-z}$ en torno a:

- $z_0 = 0$
- $z_0 = -1$
- $z_0 = i$

Dibuje los 3 radios de convergencia y relaciónelos con la distancia de z_0 a 1.

Respuesta:

- $z_0 = 0$:
  Este caso es simple. Recordemoos que la serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Converge si y sólo si $|z| < 1$, en cuyo caso se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$$

Luego, la serie buscada es:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

Y su radio de convergencia es $R = 1$.

Observación: *No es difícil calcular el radio de convergencia por definición.*

- $z_0 = -1$:
  Nos gustaría volver a usar la fórmula de la suma geométrica, pero ya no se ve tan directo como antes. Sin embargo, notemos que:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+1-(z+1)} = \frac{1}{2-(z+1)} = \frac{1}{2(1-\frac{z+1}{2})}$$

Por lo que:

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z+1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(z+1)^k$$

Cuando esta serie converge.

Calculemos el radio de convergencia:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\frac{1}{2^{k+1}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2}\cancelto{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$$

De donde obtenemos que el radio para este caso es $R = 2$.

- $\underline{z_0 = i}$:

  Procediendo de manera análoga, notamos que:

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-i-(z-i)} = \frac{1}{(1-i)(1-\frac{z-i}{1-i})}$$

  Y entonces:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i)^{k+1}}(z-i)^k$$

  Cuando esta serie converge.

  Nuevamente calculamos:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{1}{(1-i)^{k+1}}\right|^{1/k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\cancelto{1}{\left|\frac{1}{1-i}\right|^{1/k}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

  De donde $R = \sqrt{2}$.

Los dibujos quedan propuestos para el lector.

Notar que en los 3 casos, R resulta ser igual a la distancia desde z_0 a 1 (¡ z=1 indefine f !).

$\boxed{\text{P2.}}$ Encuentre el radio de convergencia R y el valor (como función de z) de cada una de las siguientes series:

(a) $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}}(z+8i)^n$

Respuesta: La serie está en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Por lo que para encontrar el radio de convergencia, simplemente calculamos:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{i^n}{2^{n+1}}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \cancelto{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2}}} \left|\frac{i}{2}\right| = \left|\frac{i}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

De donde obtenemos que $R = 2$.

Para calcular el valor de la serie, la expresamos como una geométrica, así:

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^{n+1}}(z+8i)^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}(z+8i)\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{i}{2}(z+8i))} = \frac{1}{10-iz}$$

(b) $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (z+2i)^{3n}$

Respuesta: Para proceder como en la parte anterior, primero queremos reescribir S_2 en la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

Dentro de nuestra serie tenemos el término $(z+2i)^{3n}$ y notamos que cuando n "corre" en $\mathbb{N}$, estamos sumando $(z+2i)^k$, con k múltiplo de 3. Luego, podemos reescribir S_2 como:

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (z+2i)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_k (z+2i)^k$$

Donde:

$$a_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ no es múltiplo de 3} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Y nuevamente calculamos el radio de convergencia de acuerdo a su definición:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}} = \sup\{0,1\} = 1$$

Y luego, $R = 1$.

Para calcular el valor de S_2 nuevamente la expresamos como una suma geométrica:

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} (z + 2i)^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty} ((z + 2i)^3)^n = \frac{1}{1 - (z + 2i)^3}$$

(c) $S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$

Respuesta: Recordemos que, para $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$$

Luego:

$$\cos(in) = \frac{\exp(i \cdot in) + \exp(-i \cdot in)}{2} = \frac{\exp(-n) + \exp(n)}{2}$$

Y entonces:

$$2S_3 = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} z^n}_{=:S_4} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^n z^n}_{=:S_5}$$

Por lo que S_3 convergerá si y sólo si S_4 y S_5 lo hacen.

Notamos que estas 2 nuevas series ya tienen la forma deseada para calcular sus radios de convergencia, por lo que nos basta aplicar la fórmula. Sigue que:

$$\frac{1}{R_4} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{-n}} = e^{-1}$$

$$\Longrightarrow R_4 = e$$

Y análogamente:

$$\frac{1}{R_5} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^n} = e$$

$$\Longrightarrow R_5 = \frac{1}{e}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie original del problema S_3 es $R = \frac{1}{e}$.

Por último, el valor de S_3 como función de z es:

$$S_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{e}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (ez)^n = \frac{1}{1 - \left(\frac{z}{e}\right)} + \frac{1}{1 - ez} = \frac{e}{e - z} + \frac{1}{1 - ez}$$

$\boxed{\text{P3.}}$ (a) Encuentre el máximo dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ donde la función:

$$f(z) := \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

es holomorfa, y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir, $f(z) = \arctan(z)$.

(b) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando su radio de convergencia. Deduzca a partir de lo anterior, el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.

Respuesta:

(a) Recordemos que ln es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$. Luego, f será holomorfa por ser composición de funciones holomorfa si su dominio es tal que el argumento del logaritmo nunca cae en $\mathbb{R}_-$ (obviamente no podemos incluir a $z = i$ en el dominio de f pues esto indefiniría la función). Así, podemos definir Ω como:

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : z \neq i \ \wedge \ \frac{1+iz}{1-iz} \notin \mathbb{R}_-\}$$

Para la otra parte de la pregunta, recordemos que:

$$\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{y} \quad \cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Y calculemos:

- $$\exp(if(z)) = \exp\left(i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

- $$\exp(-if(z)) = \exp\left(-i\frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)\right) = \exp\left(\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1-iz}{1+iz}}$$

Luego, reemplazando en las expresiones de arriba, después de cálculos elementales, se obtiene que:

$$\sin(f(z)) = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad \text{y} \quad \cos(f(z)) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

Y así:

$$\tan(f(z)) = \frac{\sin(f(z))}{\cos(f(z))} = z$$

De donde se concluye.

(b) Tenemos que:

$$f(z) = \frac{1}{2i} \ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Derivando:

$$f'(z) = \frac{1}{2i}\frac{1-iz}{1+iz}\frac{i(1-iz)+i(1+iz)}{(1-iz)^2} = \frac{1}{(1+iz)(1-iz)} = \frac{1}{1+z^2}$$

Inspirándonos en la P1, notamos que:

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)}$$

Luego, para $|z| < 1$, tenemos que:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

Que corresponde al desarrollo de f' como serie de potencias ($R = 1$[1]).

Para hacer la deducción que nos piden sobre f necesitaremos integrar, por lo que esta parte de la pregunta queda propuesta para motivar así el estudio de integrales de funciones complejas.

Éxito en su estudio!

[1]Notar que de alguna manera "impusimos" explícitamente ésto, sin embargo, no es difícil chequearlo usando la definición del radio de convergencia