MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar 10
25 de Mayo

P1. (a) (i) Sean $w \in \mathbb{C}$ y $r \in [0, \infty)$ tales que $|w| < 1, r < 1$ y $\bar{w}r \neq 1$. Demuestre que:

$$(w - r)(\bar{w} - r) < (1 - \bar{w}r)(1 - wr)$$

y concluya:

$$\left| \frac{w - r}{1 - \bar{w}z} \right| < 1$$

(ii) Sean $w, z \in \mathbb{C}$ tales que $|z| < 1, |w| < 1$ y $\bar{w}z \neq 1$. Usando la parte anterior demuestre:

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1$$

(iii) Suponiendo $\bar{w}z \neq 1$ demuestre que:

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| = 1$$

Si $|w| = 1$ o bien, $|z| = 1$.

P2. (a) Encuentre los discos de convergencia de las siguientes series:

(i) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (\ln(n))^n (z + 1)^{n^2}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} n^{(\ln(n))^2} z^n$

Sea $f(z) = \frac{z}{z+1}$. Encuentre la expansión en serie de $f(z)$ en torno al punto $z_0 = 0$ y calcule su radio de convergencia.

P3. (a) Demuestre que la función:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{2i} \dfrac{e^{iz} - 1}{z} & z \neq 0 \\[2ex] \dfrac{1}{2} & z = 0 \end{cases}$$

es holomorfa en todo el plano complejo.

(b) Sea γ_R una curva en el plano superior que consiste del segmento $[-R, R]$ y la semicircunferencia de radio R y centro en el origen, orientada positivamente. Usando la parte anterior demuestre que para todo $R > 0$, se tiene que:

$$\frac{1}{2i}\int_{\gamma_R} \frac{1}{2i}\frac{e^{iz}-1}{z}dz = 0$$

(c) Tomando el límite $R \to \infty$ concluye:

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \pi$$