**MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
**Semestre Otoño 2015**
**Profesor:** Mauricio Soto
**Auxiliar:** Leonel Huerta

# Pauta Auxiliar 8
## 8 de Mayo

$\boxed{\text{P1.}}$ (a) Muestre que si $f(z) := \dfrac{1}{z^k}$, entonces $f$ es derivable en $z_0 \neq 0$ y se tiene que:

$$f'(z_0) = -\frac{k}{z_0^{k+1}}, \quad \forall z_0 \neq 0$$

**Respuesta:** Nos basta calcular el límite de la definición de la derivada compleja. Para $z_0 \neq 0$ tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{\frac{1}{z^k}-\frac{1}{z_0^k}}{z-z_0} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{z_0^k - z^k}{z^k z_0^k (z-z_0)} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{\cancel{(z_0-z)}(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+...+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1})}{z^k z_0^k \cancel{(z-z_0)}} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{-(z^{k-1}+z^{k-2}z_0+...+zz_0^{k-2}+z_0^{k-1})}{z^k z_0^k} \\
&= \lim_{z\to z_0} \frac{-\sum_{n=0}^{k-1} z^{k-1-n} z_0^n}{z^k z_0^k} \\
&= -\frac{\sum_{n=0}^{k-1} z_0^{k-1}}{z_0^k z_0^k} \\
&= \frac{-(k-\cancel{1}+\cancel{1})}{z_0^{2k-k+1}} \\
&= \frac{-k}{z_0^{k+1}}
\end{aligned}$$

Lo que prueba que $f$ es derivable en $z_0$ y además que:

$$f'(z_0) = -\frac{k}{z_0^{k+1}}, \quad \forall z_0 \neq 0$$

(b) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $f$ es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

**Respuesta:** Si miramos a $f$ como una función de $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, podemos escribir:

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

Y como $f$ llega a $\mathbb{R}$, necesariamente $v \equiv 0$.

Notar que hemos usado implícitamente que $z_0 = x_0 + iy_0$.

Como $f$ es derivable en $z_0$, cumple las condiciones de Cauchy-Riemann. Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Y luego:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

Sigue que:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$

Que es lo que queríamos probar.

(c) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \to C$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en $\Omega$ entonces $f$ también es constante. *Indicación:* Considere $|f|^2$.

**Respuesta:** Supongamos que $|f|$ es constante en $\Omega$ y digamos, sin pérdida de generalidad, que $f = u + iv$. Razonemos por casos:

- Si $|f| = 0$:

Necesariamente $u = v = 0$, por lo que en este caso tenemos trivialmente el resultado.

- Si $|f| \neq 0$:

En este caso, suponiendo que $\sqrt{u^2 + v^2}$ es constante y distinto de cero. Siguiendo la indicación, tenemos que:

$$|f|^2 = u^2 + v^2 = c \neq 0 \tag{1}$$

Para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.

Notar que la de arriba es una identidad funcional, es decir, es válida para todo punto en el dominio de $u^2 + v^2$. Además, estamos haciendo directamente la identificación[1] de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$. De manera similar a lo recién hecho, a lo largo de la pregunta omitiremos la dependencia explícita de $z \in \mathbb{C}$ o $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ para simplificar la notación.

Derivando entonces (1) con respecto a $x$ y a $y$, obtenemos que:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} + 2v\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$2u\frac{\partial v}{\partial y} + 2v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Como $f$ es holomorfa en $\Omega$, cumple las conidicones de C.R. en todo punto de su dominio y podemos reescribir las igualdades de arriba como:

$$2u\frac{\partial u}{\partial x} - 2v\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$2u\frac{\partial u}{\partial y} + 2v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Lo que es equivalente a:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{3}$$

Cuando $v \neq 0$, la igualdad (2) es equivalente a:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{v}\frac{\partial u}{\partial x} \tag{4}$$

[1] ¡Notar que $f$ toma números complejos, mientras que $u$ y $v$ toman pares ordenados de números reales!

Que reemplazando en (3) nos dice que:

$$u\frac{u}{v}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Como estamos suponiendo $c \neq 0$, necesariamente $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, lo que a su vez (reemplazando en (4)) implica que $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$, cuando $u \neq 0$.

De esta forma, por C.R. tenemos que:

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Como $\Omega$ es conexo por caminos, es conexo y lo anterior implica que $f$ es constante en $\Omega$, que es lo que queríamos probar.

Notar que en la demostración hemos usado $u \neq 0$ y $v \neq 0$. ¿Qué pasa en los puntos en que alguna de estas 2 condiciones no se cumple?

Observemos que:

- No puede ocurrir que ambas funciones se anulen en un mismo punto. En efecto, si existiera $z = x + iy \in \Omega$, tal que $u(x,y) = v(x,y) = 0$ inmediatamente tendríamos una contradicción con (1).
- Si $v(x,y) = 0$, no podemos despejar en (2) para obtener (4). Sin embargo, en este caso $u(x,y) \neq 0$. Luego, (2) y (3) implican directamente que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 0$$

- Si $u(x,y) = 0$ el razonamiento es análogo.

(d) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|,\ z \in \mathbb{C}$. Pruebe que $f$ es derivable sólo en $z_0$.

**Respuesta:** Queremos ver que $f$ sólo es derivable en $z_0$. Mostraremos que $f$ es derivable en $z_0$ y que no puede serlo en otro punto.

• Veamos que $f$ es derivable en $z_0$. Para esto, nos basta ver que el límite de la definición de derivada existe. En efecto:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\cancel{(z - z_0)}|z - z_0| - 0}{\cancel{(z - z_0)}} = \lim_{z \to z_0} |z - z_0| = 0$$

Lo que prueba que $f$ es derivable en $z_0$ (Más aún, prueba que $f'(z_0) = 0$).

• Razonando por contradicción, supongamos ahora que $f$ es derivable en $w \neq z_0$. Sin pérdida de generalidad, digamos que:

$$w = x + iy \quad , \quad z_0 = x_0 + iy_0$$

Como $f$ es derivable en $w$, cumple C.R. Es decir:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

Donde $u$ y $v$ corresponden a las partes real e imaginaria de $f$.

El problema, es que conocemos $f$, pero aún no tenemos explícitamente $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$ para que C.R. nos entregue información para esta función particular.

Calculemos entonces:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)|z - z_0| \\ &= (x + iy - x_0 - iy_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \\ &= (x - x_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} + i(y - y_0)\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \end{aligned}$$

Donde identificamos $u(\cdot)$ y $v(\cdot)$.

Si llamamos $\alpha(x, y) := \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$, tenemos que:

$$u(x, y) = (x - x_0)\alpha(x, y) \quad \text{y además} \quad v(x, y) = (y - y_0)\alpha(x, y)$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= \alpha(x, y) + (x - x_0)\frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}(x - x_0)}{\alpha(x, y)} \\ &= \alpha(x, y) + \frac{(x - x_0)^2}{\alpha(x, y)} \\ &= \frac{2(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{\alpha(x, y)} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \frac{(x-x_0)^2 + 2(y-y_0)^2}{\alpha(x,y)}$$

Y de manera similar:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{\alpha(x,y)}$$

Luego, C.R. implica que:

$$\frac{2(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{\alpha(x,y)} = \frac{(x-x_0)^2 + 2(y-y_0)^2}{\alpha(x,y)} \quad \wedge \quad \frac{(x-x_0)(y-y_0)}{\alpha(x,y)} = -\frac{(x-x_0)(y-y_0)}{\alpha(x,y)}$$

Notar que en virtud de que $w \neq z_0$, tenemos que $\alpha(x,y) \neq 0$.

Además, el par de igualdades anterior es equivalente a:

$$\begin{aligned}
& 2(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (x-x_0)^2 + 2(y-y_0)^2 \quad \wedge \quad (x-x_0)(y-y_0) = -(x-x_0)(y-y_0) \\
\iff \quad & (x-x_0)^2 = (y-y_0)^2 \quad \wedge \quad 2(x-x_0)(y-y_0) = 0 \\
\iff \quad & |x-x_0| = |y-y_0| \quad \wedge \quad (x-x_0)(y-y_0) = 0 \\
\iff \quad & |x-x_0| = |y-y_0| \quad \wedge \quad [(x-x_0) = 0 \ \vee \ (y-y_0) = 0]
\end{aligned}$$

- Si $(x-x_0) = 0$:

  $$\begin{aligned}
  &\implies \quad |x-x_0| = 0 \\
  &\implies \quad |y-y_0| = 0 \\
  &\implies \quad (y-y_0) = 0 \\
  &\implies \quad w = z
  \end{aligned}$$

  Lo que es una contradicción.
- Si $(y-y_0) = 0$, el procedimiento es análogo.

De lo anterior se deduce que $f$ no puede ser derivable en $w \neq z_0$, de donde se concluye lo pedido.

**P2. *Control 2, Primavera 2011.***

Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ tal que:

(i) Para todo $z, w \in \mathbb{C}$, $f(z+w) = f(z)f(w)$

(ii) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$.

Denotemos, como es usual, $z = x + iy$ y $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

(a) Demuestre que $f(z) = e^x f(iy)$.

(b) Para todo $y \in R$, denote $u_0(y) = u(0,y)$ y $v_0(y) = v(0,y)$. Pruebe que $u_0$ y $v_0$ satisfacen el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dy} = -v_0 \\ \\ \dfrac{dv_0}{dy} = u_0 \end{cases}$$

(c) Verifique que $u_0(0) = 1$ y que $v_0(0) = 0$, y resuelva el sistema de EDO de la pregunta anterior. Deduzca que $f(z) = e^z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

**Respuesta:**

(a) Veamos que $f(z) = e^x f(iy)$.

En efecto:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(x+iy) \\ &= f(x)f(iy) \\ &= e^x f(iy) \end{aligned}$$

Donde la segunda y tercera igualdad se tienen usando las propiedades (i) y (ii), respectivamente.

(b) Denotando:

$$u_0(y) = u(0,y) \quad , \quad v_0(y) = v(0,y)$$

Tenemos que:

$$f(iy) = u_0(y) + iv_0(y)$$

Luego, usando la parte (a):

$$f(z) = e^x u_0(y) + ie^x v_0(y)$$

Donde vemos que:

$$u(x,y) = e^x u_0(y) \quad \text{y} \quad v(x,y) = e^x v_0(y) \tag{5}$$

Derivando, obtenemos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = e^x u_0(y) \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = e^x \frac{\partial v_0}{\partial y}(y)$$

Pero como $f$ es holomorfa, las condiciones de C.R. nos dicen que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

De donde obtenemos que:

$$\frac{\partial v_0}{\partial y}(y) = u_0(y)$$

Por otra parte, volviendo a derivar en (5):

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(y)e^x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = v_0(y)e^x$$

Y usando la condición de C.R. que faltaba:

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}(y) = -v_0(y)$$

De donde se concluye que $u_0$ y $v_0$ satisfacen el sistema de EDO's del enunciado.

(c) Veamos que $u_0(0) = 1$.

Sabíamos que:

$$f(z) = e^x u_0(y) + ie^x v_0(y)$$

Luego, evaluando en 0:

$$f(0) = u_0(0) + iv_0(0)$$

Pero, por (ii) ($0 \in \mathbb{R}$):

$$f(0) = e^0 = 1$$

Igualando partes real e imaginaria, se deduce que:

$$u_0(0) = 1 \quad \text{y} \quad v_0(0) = 0$$

Y además de probar que $u_0(0) = 1$, acabamos de probar que $v_0(0) = 1$.

Resolvamos ahora el sistema de EDO's.

Tenemos que:

$$u_0' = -v_0 \quad \text{y} \quad v_0' = u_0$$

Luego:

$$u_0'' = -v_0' = -u_0$$

De donde:

$$u_0'' + u_0 = 0$$

Recordamos de nuestro curso de EDO que la soluciones para este tipo de este ecuaciones son de la forma:

$$u_0(y) = A\sin(y) + B\cos(y)$$

Con $A$ y $B$ constantes a determinar [2].

Acabamos de ver que $u_0(0) = 1$, luego:

$$A \sin(0) + B \cos(0) = 1$$

Lo que implica que:

$$B = 1$$

Por otra parte:

$$0 = u_0'(0) = A \cos(0) - B \sin(0)$$

Nos dice que:

$$A = 0$$

Por lo que:

$$\begin{cases} u_0(y) = \cos(y) \\ \\ v_0(y) = \sin(y) \end{cases}$$

Es solución de la EDO de la pregunta anterior.

Finalmente, dado $z \in C$, reemplazando en $f$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x \cos(y) + ie^x \sin(y) \\ &= e^x(\cos(y) + i \sin(y)) \\ &= e^x e^{iy} \\ &= e^{x+iy} \\ &= e^z \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos probar.

**Nota:** También pueden encontrar la solución de este problema en la página del DIM, buscando en la pauta del control respectivo.

Éxito en su estudio!

Prohibido que les vaya mal ¬¬

[2]¡Recordar que ahora estamos trabajando con funciones a variable real!