

MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones**Semestre Otoño 2015****Profesor:** Mauricio Soto**Auxiliar:** Leonel Huerta**Clase Auxiliar 7****27 de Abril**

P1. Encuentre la representación cartesiana y polar de los siguientes números complejos:

(a) $z = i^{-i}$

(b) $z = i^{\ln(i+1)}$

(c) $z = \sqrt{3} + i^{-i+1}$

P2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Demuestre que si $\operatorname{Re}(f)$ es constante en Ω , entonces f es constante en Ω .

P3. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

(a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

(b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega, f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.

(c) Explícite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.

(d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .