MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar 6
20 de Abril

P1. (a) Calcule $\oint_\Gamma (y^2, z^2, x^2) \cdot d\vec{r}$, donde Γ es el triángulo de vértices $(0,0,0), (0,a,0)$ y $(0,0,a)$, recorridos en este orden, y compruebe el teorema de Stokes.

(b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ a través de la superficie del cono $x^2 + y^2 = z^2$, con $0 \leq z \leq H$, para $H \in \mathbb{R}_+$ fijo. Compruebe el teorema de Gauss.

P2. ***Control 1, Primavera 2009.***

(a) Verifique que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$

Es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar.

(b) Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$, donde:

$$\vec{G}(\vec{r}) = (y^2\cos(x) + 2z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$

y Γ es la curva que consta del arco $y = x^2$, $z = 0$ del origen al punto $(1,1,0)$ junto con el segmento recto de $(1,1,0)$ al punto $(0,0,1)$.

(c) Considere una superficie regular y orientable S con campo de normales $\hat{n}$ y $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dos campos vectoriales de clase C^1 tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{G}(\vec{r}) \quad , \ \forall \vec{r} \in S$$

Muestre que:

$$(\text{rot}\vec{F})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) = (\text{rot}\vec{G})(\vec{r}) \cdot \hat{n}(\vec{r}) \quad , \ \forall \vec{r} \in S$$

De un ejemplo de $S, \vec{F}, \vec{G}$ que cumplan las condiciones anteriores pero

$$\text{rot}\vec{F}(\vec{r}) \neq \text{rot}\vec{G}(\vec{r}) \quad , \ \forall \vec{r} \in S$$

Indicación: Dado $\vec{r}_0 \in S$ utilice el teorema de Stokes en una familia de superficies adecuadas (pequeñas y centradas en $\vec{r}_0$).

P3. (a) Encuentre todas las raíces del polinomio:

$$p(z) = 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1}$$

(b) Considere un polígono regular de n lados inscrito en el círculo unitario, tal que uno de los vértices es el punto $A_0 = (1,0)$. Al unir cualquier vértice del polígono con todos los restantes se generan $n-1$ segmentos. A partir del vértice A_0, escriba las longitudes de los segmentos A_0, A_1, A_0A_0, ..., A_0A_{n-1} y pruebe que:

$$\prod_{i=1}^{n-1} = n$$