MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar 3
30 de Marzo

P1. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2+y^2+z^2=R^2, z \geq 0$ y su base $x^2+y^2+z^2 \leq R^2, z=0$. Sea $\vec{E}$ el campo eléctrico definido por:

$$\vec{E}(x,y,z) = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$$

Encuentre el flujo eléctrico f a través de S.

Indicación: Descomponga S en dos partes S_1 y S_2 y evalúe $\int\int_{S_1} \vec{E}\cdot dS$ y $\int\int_{S_2} \vec{E}\cdot dS$ por separado.

P2. ***Control 1, Otoño 2011.***

Sea S la superficie de la elipsoide de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 = 1$$

(a) Dado $\vec{x} \in S$ encuentre la normal unitaria exterior $\hat{n}$ de S en $\vec{x}$. Para ello, use la función:

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + y^2 + z^2 - 1$$

Note que S corresponde a la superficie de nivel cero de g. Si llamamos Π al plano tangente de S en $\vec{x}$, recuerde entonces que el gradiente de g en $\vec{x}$ es perpendicular a Π.

(b) Encuentre la ecuación de Π. Muestre que el vector $\vec{p} = (\vec{x}\cdot\hat{n})\hat{n}$ verifica la ecuación de Π y que es perpendicular a éste. Notar que $f = \vec{x}\cdot\hat{n}$ corresponde a la distancia entre el origen y Π.

(c) Muestre que:

$$\int\int_S f\,dA = 4\pi a$$

(d) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{a^2}, y, z\right)$$

Muestre que $\vec{F}$ es paralelo a $\hat{n}$.

(e) Pruebe que $f = 1/(\vec{F}\cdot n)$ sobre S.

(f) Muestre que:

$$\int\int_S \frac{1}{f} dA = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{2a^2+1}{a}\right)$$