MA2002 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Semestre Otoño 2015
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Leonel Huerta

Clase Auxiliar 1
16 de Marzo

$\boxed{\text{P1.}}$ Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto, $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ campos vectoriales y $f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo escalar. Suponga toda la diferenciabilidad que necesite y pruebe las siguientes propiedades:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{div}(x\vec{F} + \vec{G}) = x\ \nabla \cdot \vec{F} + \nabla \cdot \vec{G}$.
2. $\mathrm{div}(f\vec{F}) = f\ \mathrm{div}\ \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$
3. $\triangle \vec{F} = \nabla(\ \mathrm{div}\vec{F}) -\ \mathrm{rot}(\ \mathrm{rot}\vec{F})$
4. $\mathrm{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}\ \mathrm{div}\ \vec{G} - \vec{G}\ \mathrm{div}\ \vec{F} + (G \cdot \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G}$

$\boxed{\text{P2.}}$ Para las siguientes curvas, encuentre una parametrización y calcule el vector tangente en cada punto.

1. Circunferencia de radio r.
2. Segmento de recta que une el origen con el punto (a, b, c).
3. Triángulo contenido en el plano $x + y + z = 1$, en el primer octante.
4. Curva obtenida al intersectar el casquete esférico unitario centrado en el origen con $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\boxed{\text{P3.}}$ Un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ de clase C^1 se dice *central* si es radial y sólo depende de la distancia al origen, esto es, si el campo se puede escribir en coordenadas esféricas como

$$\vec{F}(\vec{r}) = \phi(r)\hat{r},\ \ r > 0$$

para alguna función $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Ejemplos típicos de esta clase son el campo eléctrico inducido por una carga puntual en el origen y el campo gravitacional generado por una masa puntual en el origen. En ambos casos el origen constituye una singularidad que se excluye del dominio.

1. Muestre que todo campo central $\vec{F}$ es irrotacional.
2. Verifique que si $\vec{F} = \phi(r)\hat{r}$, entonces:

$$\mathrm{div}\ \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\phi(r)r^2)$$

   Deduzca que un campo central $\vec{F}$ es solenoidal en $\mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\}$ si y sólo si

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2}\hat{r}$$

   para alguna constante $K \in \mathbb{R}$. Concluya que todo campo central solenoidal admite un potencial de la forma $V(r) = \frac{K}{r} + C$, para ciertas constantes K y C.