MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 4

P1. Determine si $\|(x,y\| = \sup\{|x|,\ |y|,\ |x-y|\}$ es norma y grafique la bola unitaria.

P2. Si $A,\ B\ \subseteq \mathbb{R}^n$ con A abierto y B cualquiera. Demuestre que $A+B=\{x+y\in\mathbb{R}^n : x\in A, y\in B\}$ es abierto.

P3.

a) Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$. Muestre que $adh(A)$ puede ser descrita equivalentemente por cualquiera de las siguientes expresiones:

1) $adh_1(A)=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ (\exists(x_n)\subseteq A)\ x_n\to x\}$
2) $adh_2(A)=\{x\in\mathbb{R}^n\ :\ (\forall\varepsilon\geq 0)\ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\}$
3) $adh_3(A)=\{x\in\mathbb{R}^n\ : d(x,A)=0\}$, donde $d(x,A):=\inf\limits_{y\in A}\|x-y\|$.

b) Usando la parte anterior demuestre que $Fr(A)=adh(A)\setminus int(A)$ puede escribirse también de la forma:

$$Fr(A)=\{x\in\mathbb{R}^n : (\forall\varepsilon\geq 0)\ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset\ \wedge\ B(x,\varepsilon)\cap A^c\neq\emptyset\}$$

c) Pruebe que, dado $A\subseteq\mathbb{R}^n$ conjunto abierto o cerrado, se tiene que

$$int(Fr(A))=\emptyset$$

d) Sea $A\subseteq\mathbb{R}^n$ un conjunto que verifica la propiedad :

$$int(A)=\emptyset\ \wedge\ adh(A)=\mathbb{R}^n.$$

Muestre que A^c también lo hace.