MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 15

Preparación Examen

1. Resumen

Definición 1 (Superficie)**.** *$S \subseteq \mathbb{R}^3$ se dice superficie si existe $\vec{r} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que*

$$S = \{\vec{r}(u, v) \ : \ (u, v) \in \Omega\}$$

con Ω un abierto conexto en $\mathbb{R}^2$. $\vec{r}$ se conoce como parametrización.

Definición 2. *S se dice suave si $\vec{r} \in \mathcal{C}^1$, S se dice simple si $\vec{r}$ es inyectiva.*

Definición 3. *Sea S simple y regular y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ su parametrización. El área de S se define como*

$$A(S) = \iint_D \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v)\| \ dudv$$

Problemas

P1 *a)* Calcule el área del helicoide de radio 1 y altura 1.

b) Calcule el área de la parte del paraboloide $z = x^2 + y^2$ que está por debajo de $z = 1$.

P2 Determinar el volumen de la región limitada por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y los planos $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ y que esta dentro de $x \geq 0, \ y \geq 0$.

P3 *a)* Sea $G(x, y, z)$ una función de clase $C^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $G(1, 0, 1) = 0$ y

$$\nabla G(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad G''(1, 0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Muestre que existe un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene al punto $(1, 0)$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase $C^2(\Omega)$ tal que $f(1, 0) = 1$ y

$$G(x, y, f(x, y)) = 0 \qquad \forall \ (x, y) \in \Omega$$

Calcule la matriz $f''(1, 0)$.

b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$g(u, v) = (u^2 + u^2v + 10v, \ u + v^3)$$

1) Pruebe que, restringida a una vecindad del punto $(1, 1)$, f posee una inversa diferenciable. Calcule además el valor de la derivada de esta inversa en el punto $f(1, 1)$.

2) Use lo obtenido en la parte anterior para calcular un valor aproximado de una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} u^2 + u^2 v + 10v &= 11{,}8 \\ u + v^3 &= 2{,}2 \end{aligned}$$

P4 *a*) Encuentre adherencia, interior y frontera en $\mathbb{R}^2$ de los conjuntos

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < |x|,\ x^2 + y^2 \leq 5\}$$
$$B = \left\{ \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) \ :\ m,\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

b) Demuestre que el conjunto $S = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \|y\| = 1\}$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.