MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 14

1. Resumen

Teorema 1 (Cambio de Variable)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto $T : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Sea D' una región abierta y acotada tal que $\overline{D'} \subseteq \Omega$ y supongamos ademas que T es inyectiva en D', que la matriz $JT(u)$ es invertible $\forall u \in D'$ y que $D = T(D')$ es un abierto. Sea $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces*

$$\int_D f(x)dx = \int_{D'} f(T(u))|det(JT(u))|du$$

Problemas

P1 Sea

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\},$$

y sea la transformación $T(u, v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right)$.

a) Dibuje la región Ω. Además, encuentre y dibuje D tal que $T(D) = \Omega$.

b) Calcule la integral

$$\iint_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^2} dA$$

P2 Queremos calcular al valor de:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$

Para esto:

a) Muestre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt.$

b) Muestre que $\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \left(\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^2.$

c) Calcule

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$$

ocupando un cambio de variable a coordenadas polares.

d) Concluya.

P3 Sea $\mathcal{R}$ la región en el plano $\mathbb{R}^2$ limitada por las curvas

$$x^2 - y^2 = 1 \quad x^2 - y^2 = 9 \quad x + y = 4 \quad x + y = 6$$

Considere el cambio de variables dado por $u = x + y$ $v = x - y$ que transforma la región $\mathcal{R}$ del plano xy en la región $\mathcal{T}$ del plano uv. Utilizando el cambio de variables demuestre que el área de la región $\mathcal{R}$ es $4\ln(\frac{3}{2})$.

P4 (a) Calcule el volumen del paraboloide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

usando el cambio de variables en coordenadas esféricas:

$$x = ar\ sen(\phi)cos(\theta)$$
$$y = br\ sen(\phi)sen(\theta)$$
$$z = cr\ cos(\phi)$$

(b) Determinar el volumen de la región limitada por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y los planos $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ y que esta dentro de $a \geq 0,\ b \geq 0$.