MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 12

Preparación C3.

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Fubini en $\mathbb{R}^2$). *Sea $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ rectángulo, $f: R \to \mathbb{R}$.*

1. *Si f integrable en R y $\forall x \in [a, b]$, $f(x, \cdot)$ integrable en $[c, d]$, entonces*

$$\int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

2. *Si f es continua en R, entonces*

$$\int_R f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy.$$

Problemas

P1 *a*) Considere el rectángulo $D = [-1, 1] \times [0, 2]$ y R_n la *partición uniforme* con n^2 subrectángulos, es decir, todos los rectángulos de R_n tienen las mismas dimensiones. Calcule las sumas superior e inferior

$$S(f, R_n), \quad I(f, R_n)$$

donde $f(x, y) = e^x y$.

b) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} S(f, R_n), \quad \lim_{n\to\infty} I(f, R_n).$$

Utilice esta información para justificar que $\iint_D f$ existe, y encuentre su valor.

c) Determine, justificando muy brevemente, cuáles de las siguientes funciones son integrables en $[0, 1] \times [0, 1]$:

1) *i*) $f(x, y) = \chi_A(x, y)$, $A = \{(x, y) : y < x^2\}$ *ii*) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{sin(x-y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}$

iii) $f(x, y) = xy\chi_B(x, y)$, $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$.

Ind.: $\chi_A(x, y) = 1$ si $(x, y) \in A$ y 0 si no.

P2 Considere

$$I = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy.$$

a) Calcule I directamente.

b) Dibuje la región de integración

c) Calcule I invirtiendo el orden de integración.

P3 *a*) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ integrable. Pruebe que

$$\int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)dt \right) dx = \int_0^1 tg(t)dt.$$

b) Usando adecuadamente lo anterior, calcule la integral

$$\int_0^1 \int_x^1 (x-w)\sin(x^3) dxdw.$$

P4 Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dydxdz$$

P5 Definamos la región

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq z \leq 1-y, \ 0 \leq x \leq y^2, \ y > 0\}.$$

Escriba la integral

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z) \ dV$$

como una integral iterada en el orden

$$I = \iiint_{\mathcal{D}} (x+y+z) \ dydxdz$$

con los límites de integración correctos y luego evalúe esa integral.

P6 Sean p y q dos números reales tales que $p > 1$, $q > 1$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

a) Encuentre el mínimo de la función

$$f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{x^q}{q},$$

bajo las restricciones $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$.

b) A partir de lo anterior, pruebe que si $a, \ b$ son dos números no negativos, entonces se tiene

$$\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab.$$