MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 11

Multiplicadores de Lagrange.

Resumen

Teorema 1 (Teorema de Lagrange, condición de 1^{er} Orden)**.** *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Supongamos que x_0 es solución del problema:*

$$\min_x(\max_x) f(x), \ s.a. \ g(x) = c.$$

Entonces existe un valor $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que (x_0, λ) es mínimo (o máximo) local de la función ***Lagrangeano****: $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - c)$.*

Teorema 2 (Teorema de Lagrange, condición de 2^{do} Orden)**.** *Consideremos el problema de optimización:*

$$\min_x(\max_x) f(x) \ s.a. \ g_i(x) = c_i, \ \forall i \in \{1, \cdots, k\},$$

donde f, g_i son funciones diferenciables. Sea x_0 tal que $\forall i \in \{1, \cdots k\}$, $g_i(x_0) = 0$. Supongamos que el conjunto $\{\nabla g_1(x_0), \cdots, \nabla g_k(x_0)\}$ es linealmente independiente.Entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}^k$ tal que el par (x_0, λ) es mínimo (o máximo) local de la función Lagrangeano:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (g_i(x) - c_i)$$

Además, si $H_x L(x_0, \lambda)$ es definida positiva (negativa), entonces x_0 es mínimo (máximo) local del problema de optimización.

Problemas

P1 (a) Encuentre el valor de la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$. **obs:** ¿es conveniente trabajar con la distancia al cuadrado?

(b) Una caja rectangular sin tapa debe tener una superficie de 32 m^2. Encuentre las dimensiones de la caja de modo tal que el volumen que encierra sea máximo.

P2 Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica (i.e. $A = A^t$). Sea entonces la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to f(x) = x^t A x \end{aligned}$$

(a) Demuestre que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\nabla f(\vec{x}) = 2Ax.$$

(b) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$ (esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$). Muestre que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es punto crítico de f restringido a S si y sólo si x_0 es vector propio de A normalizado.

(c) Suponga ahora que A es definida positiva (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^t Ax > 0$). Sea $z \in \mathbb{R}^n$ no nulo, determine los puntos críticos de la función

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ x &\to < z, x > \end{aligned}$$

restringida al conjunto $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = 1\}$.

P3 Muestre que $\dfrac{n!}{n^{n/2}}$ es el valor máximo de la función en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(x) = \prod_{i=1}^{n} x_i \\ s.a. \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{i^2} = 1 \end{aligned}$$