MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 10

Preparación C2.

P1. La temperatura $T(x,y)$ en equilibrio, en una región $\Omega \in \mathbb{R}^2$ satisface en condiciones ideales la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \text{ en } \Omega$$

Suponga que Ω es la región anular:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$$

y se sabe que la temperatura es una función que depende sólo de la distancia al origen, esto es $T(x,y) = u(\sqrt{x^2+y^2})$ para una función u dos veces diferenciable en $[1,2]$. Si adicionalmente se conoce la temperatura en la frontera de esta región:

$$u(1) = T_1, \quad u(2) = T_2$$

Se pide encontrar la temperatura en todo punto de Ω.

Hint: Muestre que $u(r)$ satisface la EDO:

$$u''(r) + \frac{u'(r)}{r} = 0, \quad r \in \ [1,2].$$

P2. a) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(x,y) = (x^3 - 3xy^2,\ 3x^2y - y^3)$$

i) Demuestre que para todo $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ existe $\delta > 0$ tal que f posee una inversa local restringida a $B((x_0,y_0),\delta)$.

ii) Encuentre un valor aproximado de $f^{-1}(1{,}1; 0{,}1)$ para el caso $(x_0,y_0) = (1,0)$.

b) Considere el sistema de ecuaciones:

$$xu + yu^2v = 2$$
$$xu^3 + y^2v^4 = 2$$

i) Muestre que cerca del punto $(x_0,y_0,u_0,v_0) = (1,1,1,1)$ el sistema se puede resolver de manera única para $u,\ v$ como funciones de $x,\ y$.

ii) Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial v}{\partial x}(1,1)$ de forma explícita.

P3. a) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función

$$f(x,y) = x^2y + sen^2(x+y),$$

en torno al punto $(1,-1)$.

b) Pruebe que

$$|f(1+h_1, -1+h_2) - T_2(h_1,h_2)| \leq 8\|(h_1,h_2)\|^3,$$

Donde T_2 es el polinomio encontrado en la parte anterior.