MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 9

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de la función inversa). *Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Supongamos que para $a \in \Omega$, $DF(a)$ es invertible y que $F(a) = b$. Entonces:*

P1. *Existen abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$ y $F : U \to V$ es biyectiva.*

P2. *Si $G : V \to U$ es la inversa de F, es decir, $G = F^{-1}$, entonces G es también de clase $\mathcal{C}^1$ y $DG(b) = [DF(a)]^{-1}$.*

Teorema 2 (Teorema de la función implícita). *Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$, y sea $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un punto tal que $F(a, b) = 0$. Escribimos entonces $DF(a, b) = [D_xF(a, b)D_yF(a, b)]$ y supongamos que $D_yF(a, b)$ es invertible. Entonces existen conjuntos abiertos $U \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$, $W \subseteq \mathbb{R}^n$, con $(a, b) \in U$ y $a \in W$ tales que para cada $x \in W$, existe un único y tal que $(x, y) \in U$ y $F(x, y) = 0$. Esto define una función $G : W \to \mathbb{R}^n$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ y que satisface:*

$$F(x, G(x)) = 0,\ \forall x \in W.$$

Además, $DG(x) = -[D_yF(x, G(x))]^{-1}D_xF(x, G(x)), \forall x \in W, G(a) = b$

2. Problemas

P1. (a) (I) Pruebe que la ecuación $xy = \ln(\frac{x}{y})$ admite una solución $y = \phi(x)$ de clase $\mathcal{C}^1$ definida en una vecindad de $x_0 = \sqrt{e}$, tal que $\phi(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

(II) Deduzca que la función ϕ posee un máximo local en x_0.

(b) Sea $F(x, y, z) = z^3 \ln(xy) + 2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8$. Pruebe que la función $F(x, y, z) = 0$ define exactamente dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$, $z = \phi_i(x, y)$, $i = 1, 2$ en un entorno del punto $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Encuentre los desarrollos de Taylor de primer orden de ambas funciones en $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(c) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un punto tal que $\nabla f(x_0) = 0$, y $H_f(x_0)$ es invertible. Demuestre que para cada $a \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, la función

$$f_a(x) = f(x) + ag(x)$$

posee al menos un punto crítico.

P2. Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables tales que

$$g(x, y) = xyf\left(\frac{x + y}{xy}\right).$$

Demuestre que estas funciones cumplen la ecuación

$$x^2\frac{\partial g}{\partial x} - y^2\frac{\partial g}{\partial y} = H(x, y)g(x, y),$$

encontrando explícitamente una expresión para $H(x, y)$.

P3. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

i) Verifique que f no es inyectiva.

ii) Demuestre que, pese a lo anterior, f es localmente invertible para todo $(a, b) \neq (0, 0)$.

iii) Notando que $f(1, 2) = (-3, 4)$, obtenga una aproximación afín de $f^{-1}(-3{,}01, 3{,}98)$.

b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$g(u, v) = (u^2 + u^2 v + 10v, u + v^3).$$

i) Pruebe que, restringida a una vecindad del punto $(1, 1)$, g posee una inversa diferenciable. Calcule además el valor de la derivada de esta inversa en el punto $g(1, 1)$

ii) Use lo obtenido en la parte anterior para calcular un valor aproximado de una solución del sistema de ecuaciones:

$$u^2 + u^2 v + 10v = 11{,}8$$
$$u + v^3 = 2{,}2$$