



Auxiliar 7

Taylor

Teorema 1 (Taylor de 2do Orden). Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola con centro en x_0 , $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overline{B} \subseteq D$ y f es de clase C^3 . Entonces el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en torno a x_0 viene dado por:

$$P_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t \cdot H_f(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Y se cumple que para todo $x \in B$:

$$f(x) = P_2(x) + o(|x - x_0|).$$

En donde el error viene esta acotado por:

$$o(|x - x_0|) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sup_{y \in B} \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(y) \right| |x - x_0|^3.$$

Definición 1 (Multi-índice). Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Definimos la notación de derivada con multi-índice como:

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Y también $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ y $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!$. Donde $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$.

Por ejemplo si $n = 3$ y $\alpha = (1, 0, 2)$ entonces

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_3^2}.$$

Y también $x^\alpha = x_1 \cdot x_3^2$ y $\alpha! = 1!0!2!$

Teorema 2 (Caso General). Sea $B \subset \mathbb{R}^n$ una bola con centro en x_0 , $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\overline{B} \subseteq D$ y f es de clase C^{n+1} . Entonces el desarrollo de Taylor de orden $k \leq n$ viene dado por:

$$P_k(x) = \sum_{|\alpha|=0}^k \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}.$$

Y se cumple que:

$$f(x) = P_k(x) + \sum_{|\alpha|=k+1} R_\alpha(x) \frac{(x - x_0)^\alpha}{\alpha!}.$$

Donde el Error asociado a cada multi-índice α esta acotado así:

$$|R_\alpha(x)| \leq \sup_{y \in B} \left| \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(y) \right|$$

Problemas

P1. Encuentre la aproximación de segundo orden para la función:

$$f(x, y, z) = xe^y + ze^{2y}.$$

en torno al punto $(0, 0, 0)$. Encuentre una vecindad en torno al origen que garantice un error de a lo más 10^{-3} .

- P2.** a) Encuentre la expansión de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y) = x \log(1 + y) + \sin(x + y)$ en torno al punto $(0, 0)$.
- b) Sea $g(x, y) = x^5 \cos(x + y)$. Encuentre el polinomio $p(x, y)$ de grado 9 que mejor aproxima la función $g(x, y)$ cerca del punto $(0, 0)$.
- c) Sea $h(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$. Encuentre un polinomio de dos variables $T(x, y)$ que verifique la propiedad:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h(x, y) - T(x, y)}{x^4 + y^4} = 0$$

P3. a) Considere la función

$$f(x, y) = 3x^3 + y^2 - 9x - 6y + 1$$

Encuentre sus puntos críticos y clasifíquelos: mínimo/máximo local o punto silla. ¿La función tiene un mínimo global?

b) Repita lo mismo para

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$$

P4. Verifique que el punto $(1, 1, 1)$ es crítico para la siguiente función:

$$f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 + 4xyz,$$

Y determine su naturaleza.