MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 6

P1. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Se define el laplaciano de f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Y la ecuación de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

Suponga que $u:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, función dos veces diferenciable, satisface la ecuación de Laplace. Pruebe que $v(s,t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$ también satisface la ecuación de Laplace.

P2. Suponga que $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial:

$$y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

y considere el cambio de variables $u(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ y $v(x,y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$. Además sea la función $g(u(x,y), v(x,y)) = F(x,y)$
.

Pruebe que la ecuación se transforma en:

$$2(u^2 - v^2)\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = u\frac{\partial g}{\partial v} - v\frac{\partial g}{\partial u}.$$

P3. La ecuación de ondas en una dimensión está dada por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x,t) - c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

Sea $f(x,t)$ una solución C^2 de esta ecuación. Pruebe que f se puede escribir de la forma:

$$f(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct), \quad g,h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

P4. Suponga que $n \geq 2$, $a, b \in \mathbb{R}^n$ $a \neq b$ se define

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & \|x-a\|^2 \|x-b\|^2 \end{array}$$

Donde $\|\cdot\|$ denota la norma euclidiana.

a) Demuestre que f es de clase C^2.

b) Calcule el Gradiente y el Hessiano de f.