MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto
Auxiliar: Felipe Salas.

Pauta P3

21 de abril de 2015

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Diremos que f es homogénea de grado p si:

$$(\forall x \neq 0)(\forall t > 0)\ f(tx) = t^p f(x)$$

El objetivo es demostrar que f es homogénea de grado p si y sólo si $J_f(x) \cdot x = pf(x)\ \forall x \neq 0$, donde $J_f(x)$ es el Jacobiano de la función evaluado en x.

a) $(\Rightarrow)$ defina $\varphi(t) = f(tx)$ y derivela de dos formas distintas.

b) $(\Leftarrow)$ Muestre que $\varphi(t)t^{-p}$ es constante y concluya.

Demostración:

a) Notemos que si f es homogénea de grado p, entonces para un x fijo:

$$\varphi(t) = f(tx) = t^p f(x)$$

Derivando cada una:

$$\varphi'(t) = J_f(tx) \cdot x$$
$$\varphi'(t) = pt^{p-1} f(x)$$

Luego, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$J_f(tx) \cdot x = pt^{p-1} f(x)$$

Y evaluando en $t = 1$:

$$J_f(x) \cdot x = pf(x)$$

b) Definamos $g(t) = \varphi(t)t^{-p} = f(tx)t^{-p}$. Para que sea una constante veamos que su derivada da 0.

$$\begin{aligned} g'(t) =& J_f(tx) \cdot x \cdot t^{-p} - p \cdot t^{-p-1} f(tx) \\ =& J_f(tx) \cdot tx \cdot t^{-p-1} - p \cdot t^{-p-1} f(tx) \end{aligned}$$

Reemplazando $J_f(tx) \cdot tx = pf(tx)$ queda:

$$g'(t) = pf(tx)t^{-p-1} - p \cdot t^{-p-1} f(tx) = 0$$

Luego $g(t)$ es una constante que no depende de t.

Por lo tanto, $g(t) = h(x)$, que equivale a $f(tx)t^{-p} = h(x)$, evaluando en $t = 1$ llegamos a $f(x) = h(x)$, por lo que finalmente

$$f(tx) = t^p \cdot f(x)$$

Luego es homogénea de grado p.