



Auxiliar 5

20 de abril de 2015

Resumen

Teorema 1. (Clairaut-Schwarz en $\mathbb{R}^2$)

Sea A (abierto) $\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existen y son continuas en A entonces:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \forall (x, y) \in A.$$

Problemas

P1. Considere la siguiente función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan(\frac{y}{x}) - y^2 \arctan(\frac{x}{y}) & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} f(h, y)$ $\lim_{h \rightarrow 0} f(x, h)$ para $x \neq 0$ e $y \neq 0$. Concluya que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Demuestre que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.

Hint: Para demostrarlo en $(0, 0)$ podría servirle usar coordenadas polares.

c) Para $(x, y) \neq (0, 0)$ calcule $\nabla f(x, y)$, $H_f(x, y)$. Verificar que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

d) ¿Se puede concluir que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$? Calcúlelas y concluya (usando Clairaut-Schwarz) que no son continuas en $(0, 0)$.

P2. Sean $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $x_0 \in \text{int}(D)$. Sea $\tilde{D} = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$, suponga que $x_0 \in \tilde{D}$.

Se define $h : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente forma

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

a) Demuestre que h es diferenciable, justifique utilizando regla de la cadena.

b) Demuestre que $\nabla h(x_0) = \frac{g(x_0)\nabla f(x_0) - f(x_0)\nabla g(x_0)}{(g(x_0))^2}$

c) Sean $f(x, y) = x^3 \sqrt{xy}$ $g(x, y) = \sqrt{x^3 - y}$. calcular el gradiente de $h = \frac{f}{g}$ de manera explícita y utilizando la formula anterior.

P3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable. Diremos que f es homogénea de grado p si:

$$(\forall x \neq 0)(\forall t > 0) \quad f(tx) = t^p f(x)$$

El objetivo es demostrar que f es homogénea de grado p si y sólo si $Jf(x) = pf(x) \quad \forall x \neq 0$.

a) ($\Rightarrow$) defina $\varphi(t) = f(tx)$ y derivela de dos formas distintas.

b) ($\Leftarrow$) Muestre que $\varphi(t)t^{-p}$ es constante y concluya.