MA2001-7 Cálculo en Varias Variables.
Profesor: Mauricio Soto.
Auxiliar: Felipe Salas.

Auxiliar 3

14 de abril de 2015

Resumen

Teorema 1 (Bolzano Weierstrass)**.** *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Luego, A es compacto si y solo si $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, (x_n) tiene subsucesión convergente en A.*

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea $\bar{x} \in A$. Decimos que f es continua en $\bar{x}$ ssi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \text{ tal que } (\forall x) \text{ tq } ||x - \bar{x}|| \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(\bar{x})|| \leq \varepsilon$$

Proposición 1. *Una función f es continua en x_0 ssi:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Definición 2. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto. Sea e_j el j-ésimo elemento de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Se define la **derivada parcial de f en x con respecto a x_j** como:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + he_j) - f(x)}{h}$$

Definición 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto, $x_0 \in A$. Se define la **matriz Jacobiana de f en x_0** como:

$$(Df(x_0))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0)$$

Definición 4. Se define el **plano tangente** de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en (x_0, y_0) como:

$$z = f(x_0, y_0) + \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Definición 5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto, $x_0 \in A$. f **es diferenciable en** x_0 si sus derivadas parciales existen, y además:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{||f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)||}{||x - x_0||} = 0$$

Problemas

P1. Calcule el siguiente límite por definición:

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x^3}{x + y} = \frac{1}{3}$$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \gamma & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Encuentre γ de modo que f sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x,y) \neq (0,0)$.

(c) Calcule, si es que existen, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(d) Determine en qué puntos son continuas las derivadas parciales de f.

P3. Hallar la ecuación del plano tangente de las siguientes superficies, en los puntos indicados:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^4 - e^{xy}$, en $(1,0)$

(b) $f(x,y) = \cos(x)\sin(y)$, en $(0,\pi/2)$

(c) ¿Dónde corta al eje z el plano tangente a $f(x,y) = e^{x-y}$ en $(1,1)$?

P4. Estudie la diferenciabilidad de $f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$ por definición.

P5. Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$, donde A es cerrado y acotado, f es continua y biyectiva. Pruebe que $f^{-1} : B \to A$ es continua.