

Punto Examen

P1) a) $f(x, y) = \frac{x^4}{4} + y^4 + xy + \ln\left(\frac{1}{x^2 y}\right)$

$$= \frac{x^4}{4} + y^4 + xy - 2 \ln(x) - \ln(y) \quad \text{propiedad de logaritmos}$$

$$\Rightarrow \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + y - \frac{2}{x} \\ 2y^3 + x - \frac{1}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ordenando la ecuación nos queda

$$\frac{x^4 + 2xy - 4}{4x} = 0$$

$$\frac{2y^4 + xy - 1}{y} = 0$$

$$\begin{aligned} (*) \quad x^4 + 2xy &= 4 \\ \Leftrightarrow 2y^4 + xy &= 1 \quad | :2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad x^4 + 2xy &= 4 \\ (2) \quad 4y^4 + 2xy &= 2 \quad | - \end{aligned}$$

$$x^4 - 4y^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2 + 4y^4}$$

Tomamos $x = \sqrt{2 + 4y^4}$ ya que $x > 0$. Reemplazando en (2)

$$4y^4 + 2y\sqrt{2 + 4y^4} = 2$$

$$\Leftrightarrow 2y^4 + y\sqrt{2 + 4y^4} = 1$$

(*) Podemos simplificar porque $x, y > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+4j^2} = \frac{1-j^2}{j} \quad | \cdot j$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4j^2 = \frac{1}{j^2} - 4 + 4j^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{j^2} = 6 \quad \therefore j = \sqrt{\frac{1}{6}} > 0$$

• Como $x = \sqrt{2+4j^2}$

$$x = \sqrt{2 + \frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{8}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Luego $(\bar{x}, \bar{j}) = \left(2\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ es pto. crítico.

Para conocer la naturaleza del punto calculamos el Hessiano.

$$Hf(x, j) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{2}{x^3} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{1}{j^3} \end{bmatrix} \Rightarrow Hf(\bar{x}, \bar{j}) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Usando el método de los determinantes

$$\det(H) = 5/4 > 0$$

$$\det(Hf(\bar{x}, \bar{j})) = 10 - 1 = 9 > 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow (\bar{x}, \bar{j}) \text{ es min local}$$

$\Rightarrow (\bar{x}, \bar{j})$ es min global por ser único

b)

Usando la indicación: como $A = \{(x, y) \mid x, y > 0\} \Rightarrow \partial A = \{(x, y) \mid x=0 \vee y=0\}$

$$\text{Claramente } (x, y) = (0, 1) \in \partial A$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} f(x, y) = \frac{0}{4} + 1 - 0 + \lim_{x \rightarrow 0} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$$

$\therefore f$ no es acotada superiormente en $A = \text{Dom}(f)$ (esto se puede ver claramente del hecho que $\text{Dom}(\ln(1/x^2)) = A$).

$\Rightarrow f$ no tiene máximo.