

MA2001-6 Cálculo en Varias Variables

Profesor: Patricio Felmer A.

Auxiliar: Diego Marchant D.



Guía Complementaria C3 y Examen

1. Multiplicadores de Lagrange

1. Encontrar los puntos extremos de la función $f(x, y, z) = x + 3y - 2z$ sobre la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
2. Analice los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^3 + y^3$ sujeto a la restricción $F = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$
3. Calcular los puntos más lejanos y más cercanos al origen de la curva $5x^2 + 5y^2 + 6xy - 8 = 0$
4. Determine los puntos extremos de

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy$$

en la región

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{8} = 1$$

2. Integración

1. Sea $f : \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua con $\mathcal{R} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$. Demuestre que existen $m := \min_{(x,y) \in \mathcal{R}} f(x, y)$ y $M := \max_{(x,y) \in \mathcal{R}} f(x, y)$ tales que

$$m \cdot ab \leq \int_{\mathcal{R}} f \leq M \cdot ab$$

Indicación: Aplique el teorema de Weierstrass y concluya. Otra forma de hacerlo es a través de sumas de Riemann.

2. Se define la región $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x\}$. Calcule:

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+4x+4y}} dy dx$$

3. Demuestre usando sumas de Riemann que las siguientes funciones son integrables y calcule su valor:

a) $f(x, y) = x + 4y; \Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$

b) $f(x, y) = 3x^2 + 2y; \Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe el Lema de Schwarz. Para ello defina la función $g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$ e integre sobre un rectángulo arbitrario, luego justifique el hecho de que una función continua es nula ssi su integral sobre cualquier rectángulo es nula.

3. Volúmenes

1. Encuentre el volumen de la región $D = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq (x+2y-1)^2; x \geq 0; y \geq 0; x+2y-1 \leq 0\}$
2. Calcular el volumen del sólido que se forma al intersectar el cilindro $x^2 + y^2 \leq rx$ con los planos $z = 0$ y $x + y - z = 0$.
3. Calcule el volumen del prisma (dibújelo) en $\mathbb{R}^3$ con base el triángulo en el plano $z = 0$ limitado por las rectas $y = 0$, $x = 1$ e $y = x$ cuya parte superior yace sobre el plano $x + y + z = 3$
4. Considere el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ determinado por $x^2 + y^2 \leq 9$, $z \geq 0$, $z \leq 2 + (y-3)^2$, $z \leq 2 + (y+3)^2$. Encuentre el volumen de Ω .

4. Teorema del Cambio de Variable

1. Considere la transformación $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$(u, v) \mapsto T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) = (u + v, u^2 - v)$$

Para la pregunta 2 de Integración:

- a) Bosquejar D y encontrar D^* tal que $T(D^*) = D$.
 - b) Utilizando TCV calcule I .
2. Calcule la integral doble

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

donde

$$R = \{(x, y) | x \geq 1; y \geq 1; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

3. Determinar el volumen de la región limitada por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y los planos $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ y que está dentro de $x \geq 0$, $y \geq 0$
4. Sea $D = \{(x, y) | x \geq 0; y \geq 0; x \leq y \leq 1; y \geq 1/2 - x\}$. Calcule

$$\iint_D \frac{ye^y}{(x+y)^2} dx dy$$

usando el cambio de variables $x + y = u$, $y = uv$.

5. Superficies

1. Determinar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ incluida dentro del cilindro $x^2 + y^2 \leq ay$ (considere simetría en el problema y use coordenadas cilíndricas). Dibuje.
2. Considere la superficie S del paraboloide $z = 1 + x^2 + y^2$ que queda dentro del cilindro $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.
 - a) Bosqueje S y encuentre una parametrización para la superficie.
 - b) Calcule el vector normal unitario a S y el elemento de superficie.
 - c) Calcule la masa total de S , suponiendo densidad

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

LoDamosVuelta