MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"Lo que distingue lo real de lo irreal está en el corazón" - John Forbes Nash

Auxiliar Extra 2

25 de Mayo de 2015

1. Resumen

Teorema 1. ***(Regla de la Cadena)****: Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ con f diferenciable en x_0 y g diferenciable en $f(x_0)$ entonces*

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0)$$

Definición 1. (**Derivada de orden superior**): Sea $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la derivada parcial de una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se define la segunda derivada parcial como

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}$$

Lemma 1. ***(Lema de Schwarz)****: Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$, es decir, con segundas derivadas continuas, entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}$$

Definición 2. (**Hessiano**): Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función 2 veces derivable. Se define el Hessiano de f como

$$\mathcal{H}f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Teorema 2. ***(Condición de primer orden)****: Sea x_0 un punto crítico de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ entonces*

$$\nabla f(x_0) = 0$$

Teorema 3. ***(Condición de segundo orden)****: Sea x_0 un punto crítico de una función diferenciable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se cumple que*

1. *Si $\mathcal{H}f(x_0)$ es definida positiva entonces x_0 es mínimo local.*
2. *Si $\mathcal{H}f(x_0)$ es definida negativa entonces x_0 es máximo local.*
3. *Si $\mathcal{H}f(x_0)$ es otra cosa entonces x_0 es punto silla.*

Teorema 4. ***(Taylor de orden 2)****: Se define la aproximación de Taylor de orden 2 en torno a x_0 como*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h^t \mathcal{H}f(x_0)h + R_2(x_0,h)$$

donde

$$R_2(x_0,h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int \frac{(1-t)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}(x_0+th)h_i h_j h_k dt$$

Teorema 5. ***(TFInverso)****: Sea f de clase $\mathcal{C}^1$ una función tal que $f(a)=b$ y $Df(a)$ es invertible, entonces f biyectiva en un entorno de a y admite una inversa tal que*

$$Df^{-1}(b) = [Df(a)]^{-1}$$

Teorema 6. ***(TFImplícito)****: Sea $F(x,y)$ de clase $\mathcal{C}^1$, tal que $F(x_0,y_0)=0$ y $D_yF(x_0,y_0)$ sea invertible. Entonces se puede despejar implícitamente $y=y(x)$ en un entorno U de x_0 tal que*

$$F(x,y(x)) = 0, \quad \forall\ x \in U$$

2. Problemas

1. a) Considere $u(x,y)$, $v(x,y)$ funciones de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \wedge\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Verifique que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \wedge\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

b) Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ tal que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$$

Se define $g(x,y) = f(u(x,y),v(x,y))$ donde u y v son funciones que cumplen las condiciones vistas en a). Demuestre que g satisface

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

2. Sea $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$

a) Demuestre que f no es inyectiva.

b) Demuestre que para todo $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, f es invertible en (x_0,y_0).

c) Calcular aproximadamente $f^{-1}(-3{,}01, 3{,}98)$. Note que $f(1,2) = (-3,4)$

3. Considere el sistema siguiente

$$xy + uy^3 - v + vx^2 = 0$$
$$x^2y + x + x^2u^2 + u + yv^3 + v = 0$$

Demuestre que en torno al punto $(x_0.y_0,u_0,v_0) = (0,0,0,0)$ las variables (u,v) pueden ser despejadas en función de (x,y).

Propuesto: Calcule $\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0)$.