MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

Guía Complementaria C2

1. Regla de la cadena

1. Sea

$$g(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{y^2+1} + arctg(x+y+z) \\ ln(x^2+z^2) \end{bmatrix}$$

y $h(u,v) = g(f(u,v))$ donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es diferenciable en $(0,0)$ y satisface

$$f(0,0) = (0,1,-1)$$

$$Df(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calcule $Dh(0,0)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Suponga además que g y h son funciones positivas. Definimos

$$F(x,y) = f(g(x)^{h(y)}, h(y)^{g(x)})$$

Calcule $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial x^2 \partial y}$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que verifica la igualdad

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

   I) Si $u = y - ax$ y $v = y - bx$, exprese la igualdad anterior para el caso en que f see expresa como $f(u(x,y), v(x,y))$.

   II) Determine las condiciones que deben cumplir A, B, C, a y b para que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0$.

4. "*Oda a la matraca*": Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ y $g(x,y) = f(\frac{x+y}{x-y})$. Pruebe que

$$x\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + (x+y)\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

2. Optimización Irrestricta

1. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 3x^2 + 3y^2 + 1$$

Determine los puntos críticos de f y clasifíquelos.

2. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 8(x^2 + y^2) + 8$$

Determine los puntos críticos de f y clasifíquelos.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$$

Determine los puntos críticos de f y clasifíquelos.

4. "*Oda a la matraca*" Encuentre todos los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = \frac{xy}{1 + x^4 + y^4}$$

y clasifíquelos.

3. Taylor

1. Encontrar la expasión de Taylor de orden 2 para

$$f(x, y, z) = ln(x^2 + y^2 + z)$$

en torno a $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. Encuentre la aproximación de 2do orden P_2 de la función

$$f(x, y, z) = xe^y + ze^{2y}$$

en torno al punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$. SI se escribe $f = P_2 + E$ donde E es e error de Taylor de 2do orden, encuentre una región en torno al origen que garantice un error E menor o igual a 10^-3.

3. Considere la función

$$f(x, y) = cos(x^2 + y^2)$$

Encuentre un polinomio de orden 2010 $P(x, y)$ tal que

$$D^{(k)}f(0, 0) = DP^{(k)}P(0, 0) \quad \forall k = 0, 1, ..., 2010$$

Hint: Recuerde el truco usado en la P2 del auxiliar 9.

4. a) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 $T_2(x, y)$ de la función

$$f(x, y) = sen^2(x + y) + x^2y$$

en torno $(1, -1)$.

b) Pruebe que

$$|f(1 + h_1, -1 + h_2) - T_2(h_1, h_2)| \leq 8\|(h_1, h_2)\|^3$$

4. TFInverso

1. Pruebe que la función $f(x,y) = (x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}y^3, y - \frac{1}{2}y^2 - x + \frac{1}{6}x^3)$ admite una inversa local de clase $\mathcal{C}^1$ en torno a $(0,0)$ y calcule $Df^{-1}(f(0,0))$.

2. Considere la función
$$f(x,y) = (x + \frac{x}{x^2+y^2}, -y + \frac{y}{x^2+y^2})$$
Demuestre que f^{-1} está definida en torno a $(0,1)$ y encuentre la derivada de $f^{-1}(f(0,1))$.

3. Considere la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x,y,z) = (zcos(xy), zsen(xy), x+z)$$
Muestre que la función f admite una inversa en una región cercana al punto $(1,0,1)$. Calcule $Df^{-1}(f(1,0,1))$

4. Considere la función
$$f(u,v) = (u^2 + u^2v + 10v, u + v^3)$$
   a) Encuentre el conjunto de puntos en los cuales f es invertible localmente.
   b) Compruebe que $(1,1)$ pertenece a conjunto anterior y calcule aproximadamente el valor de $f^{-1}(11{,}8, 2{,}2)$ usando Taylor.

5. TFImplícito

1. Probar que la ecuación
$$x^2y - xy^2 + z^2cos(xz) = 1$$
define una función implícita $z = z(x,y)$ en un entorno del punto $(0, \sqrt{2}, 1)$

2. Las ecuaciones
$$x^2 + y^2 + z^2 = 3$$
$$x^2 + 3xy - 2z = -1$$
definen implícitamente a $y = y(x)$ y $z = z(x)$, tales que $y(1) = -1$ y $z(1) = 1$. Calcular
$$\lim_{x \to 1} \frac{y(x) + z(x)}{x - 1}$$
Hint: Recuerde que $y(x),\ z(x)$ son funciones de una variable y que el límite es de la forma $\frac{0}{0}$.

3. Muestre que cerca del punto $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0,1,1,1)$ se puede resolver
$$sen(x)u + yv^2u = 1$$
$$u^2v + xyv^2 = 1$$
de manera única para u, v como funciones de clase $\mathcal{C}^1$. Calcule $\frac{\partial u}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial v}{\partial x}(0,1)$.

4. De condiciones para que las ecuaciones

$$x = u + v$$
$$y =^2 +v^2$$
$$z = u^3 + v^3$$

definan a $z = z(x, y)$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$
Hint: Escriba el sistema de 3 ecuaciones como una función $F = F(x, y, z, u, v)$ y vea cuándo se cumplen las condiciones de TFI para esta función si quisiéramos despejar z, u y v.

Éxito!