MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"El álgebra es generosa: A veces nos da más de los que se pide" -
Jean-Baptiste le Rond D'Alembert

Auxiliar 5

14 de Abril de 2015

1. Resumen C1

Definición 1. **(Conjunto Abierto)** Se dice que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto si

$$\forall x_0 \in A, \ \exists r > 0 \ : \ B(x_0, r) \subset A$$

Definición 2. **(Conjunto Cerrado)** Diremos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado si A^c es abierto.

Definición 3. **(Interior)** Se define el Interior de A como

$$Int(A) = \{x \in A \mid \exists \epsilon > 0 : \ B(x, \epsilon) \subset A\}$$

Definición 4. **(Adherencia)** Se define la Adherencia de A como

$$Adh(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall \epsilon > 0 : \ B(x, \epsilon) \cap A \neq \phi\}$$

Definición 5. **(Frontera)** Se define la Frontera de A como

$$Fr(A) = Adh(A) \backslash Int(A)$$

Definición 6. **(Límite)** Se dice L es el límite de $f(x)$ cuando x va a x_0 si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - L\| < \epsilon$$

Definición 7. **(Continuidad)** Se dice que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en $x_0 \in A$ si

$$x_n \longrightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

Teorema 1. ***(Álgebra de continuas)*** *Sean f, g continuas en x_0 y $c \in \mathbb{R}$, entonces*

1. *cf es continua en x_0.*
2. *$f + g$ continua en x_0.*
3. *$f \cdot g$ es continua en x_0.*
4. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $f(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ continua en x_0.*
5. *Si g es continua en $f(x_0)$ entonces $g \circ f = g(f(x))$ continua en x_0.*

Teorema 2. ***(Bolzano-Weierstrass)*** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Proposición 1. ***(Conjunto Compacto)*** *Un conjunto se dice Compacto si es Cerrado y Acotado.*

Teorema 3. ***(Weierstrass)*** *Sea C un conjunto compacto. Toda función continua sobre K alcanza su máximo y su mínimo en K.*

Definición 8. (Derivada Parcial) Se define la derivada parcial de f con respecto a x_j en x_0 como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + he_j) - f(x_0)}{h}$$

donde e_j es el vector $(0, ..., 1, ..., 0)$ con un 1 en la componente j.

Definición 9. (Diferenciabilidad) f se dice diferenciable en x_0 si existen todas las derivadas parciales de f en x_0 y

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

donde $Df(x)$ es una matriz tal que $(Df(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$

Definición 10. (Aproximación Lineal) Si f es una función diferenciable entonces la función

$$L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h$$

es una aproximación de primer orden de la función f cerca de x_0.

Teorema 4. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función tal que existen sus derivadas parciales y son continuas en un punto $x_0 \in A$ entonces f es diferenciable en x_0*

2. Problemas

1. *a)* Considere el conjunto

   $$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0)\}$$

   1) Encuentre el interior, adherencia y frontera de A.
   2) Determine si A es abierto, cerrado o ninguno de los anteriores.

   b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

   $$f(x, y) = \begin{bmatrix} x^2y + e^{xy} \\ x + y^2 \\ sen(xy) \end{bmatrix}$$

   Demuestre que f es diferenciable en el punto $(1, 0)$ y encuentre su matriz derivada (jacobiana) en este punto.

2. Encuentre la ecuación del plano tangente a la superficie

   $$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = a + b + c\}$$

   donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ está definida por

   $$f(x, y, z) = ax^2y + by^2x + cz^2x$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xysen(x)}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   a) Estudie la continuidad de $f(x, y)$

   b) Determine, si existe, la derivada direccional $f'((0, 0); e)$ donde $e = (e_1, e_2)$ tal que $\|e\| = 1$