MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"Lo poco que he aprendido carece de valor, comparado con lo que ignoro y no desespero en aprender" - René Descartes

Auxiliar 4

7 de Abril de 2015

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\left(\dfrac{1}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   a) Calcule $\nabla f(0,0)$.
   b) Pruebe que f es diferenciable en $(0,0)$.
   c) Probar que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ no son continuas en $(0,0)$.

2. Estudie la continuidad, derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   b) $f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

3. (Calderón de la Barca escribió en el epílogo del primer acto de su obra *La vida es Sueño* "¿Qué es la vida un frenesí, ¿Qué es la vida?, una ilusión, una sombra, una ficción y el mayor bien es pequeño: que toda la vida es sueño, y los sueños, sueños son")

   Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, tal que sus componentes ϕ_1 y ϕ_2 verifican

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \ \wedge \ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial y}$$

   Sea $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, tal que $h = h(u,v)$. Se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $f = h \circ \phi$.

   Demuestre que

$$\langle \nabla f(x,y), \nabla \phi_1(x,y) \rangle = \frac{\partial h}{\partial u}(\phi(x,y)) \cdot \|\nabla \phi_1(x,y)\|^2$$