MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

"El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fértil de descubrimientos matemáticos" - Joseph Fourier

Auxiliar 3

31 de Marzo de 2015

1. a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua tal que
   - $f(0) > 0$, y
   - $f(x) < 0$ para todo x con $\|x\| > 1$

   Demuestre que existe $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que
   $$f(x) \leq f(\overline{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

   b) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:
   $$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x+y \leq 0 \\ \sqrt{x+y}+xy & \text{si } x+y > 0 \end{cases}$$
   Determine los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua. Justifique su respuesta.

2. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{sen(x^2-y^2)}{x^2-y^2} & \text{si } x^2 \neq y^2 \\ 1 & \text{si } x^2 = y^2 \end{cases}$$
   Demuestre que f es continua en todo punto de $\mathbb{R}^2$.

   b) Determine si existe el límite
   $$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{\sqrt{x^{12}+y^6+z^4}}$$

3. Determine la aproximación lineal afín a la función
   $$f(x,y,z) = \frac{e^{xy}+z^2}{1+cos^2(xy)}$$
   en el punto $(0,3,2)$.

4. (***Propuesto***) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua y definamos $g : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ mediante:
   $$g(x) = f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$$

   I) Pruebe que g alcanza su máximo y mínimo en $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ (Hint: Considere g restringida al conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$).

   II) Pruebe que el límite
   $$\lim_{x\to 0} g(x) \textit{ existe}$$
   si y sólo si f es constante en $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.