

CONTROL I CÁLCULO EN VARIAS VARIABLES, 2014/1

Tiempo: 3.0 hrs.

- (1) (a) Considere la superficie definida por la ecuación

$$z = \sin(\pi x^2)e^{x-y^3}$$

Encuentre la ecuación del plano tangente a esta superficie en el punto $(1, 1, 0)$.

- (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2y + e^{xy} \\ x + y^2 \\ \sin(xy) \end{bmatrix}$$

Demuestre que f es diferenciable en el punto $(1, 0)$ y encuentre su matriz derivada (matriz Jacobiana) en este punto.

- (2) Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Demuestre que f es diferenciable en todo punto $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.

- (b) Calcule, si existen, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

- (c) Determine si f es diferenciable en $(0, 0)$.

- (3) Sean A y B subconjuntos de \mathbb{R}^N

- (a) Demuestre que

$$\text{Adh}(A \cup B) = \text{Adh}(A) \cup \text{Adh}(B)$$

- (b) Deduzca, a partir de (a) que la unión de dos conjuntos cerrados es un cerrado y que la intersección de dos conjuntos abiertos es un abierto.

- (c) Demuestre que el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + \sin(y) < \log(1 + |x| + |y|)\}$$

es un abierto en \mathbb{R}^2 .