

MA2001-6 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Patricio Felmer A.**Auxiliar:** Diego Marchant D.

“En las matemáticas, el arte de proponer una pregunta debe tener un valor más alto que resolverlo” - Georg Cantor

Auxiliar 2

20 de Marzo de 2015

1. Sea la sucesión definida como

$$S_n = \left(\operatorname{sen} \left(\frac{\pi n}{2} \right), \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right)$$

demuestre que existe una subsucesión S_{n_k} convergente y determínela.

2. Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}^n$. Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión que verifica $d(x_n, y_n) < 1/n$ para todo $n \geq 1$. Pruebe que:

a) $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también es de Cauchy.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x$

3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que cumple la siguiente propiedad:

$$\exists k \in (0, 1) \text{ tal que } \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Demuestre el **Teorema del Punto Fijo de Banach** en $\mathbb{R}^n$. Para ello proceda como sigue: Considere la sucesión definida por $x_{n+1} = f(x_n)$

a) Pruebe que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Pruebe que $\|x_{n+p} - x_n\| \leq \frac{k^n}{1-k} \|x_1 - x_0\| \quad \forall n, p \in \mathbb{N}$. Concluya que $\{x_n\}_n$ es convergente a algún $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

c) Pruebe que $\bar{x}$ es el único con la propiedad $f(\bar{x}) = \bar{x}$. A este $\bar{x}$ le llamamos *Punto Fijo*.