

MA2001-6 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Patricio Felmer A.**Auxiliar:** Diego Marchant D.

“Un matemático que no tenga algo de poeta jamás será un completo matemático” - Weierstrass

Auxiliar 1

17 de Marzo de 2015

1. a) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos. Pruebe que $A := \bigcup_{i \in I} A_i$ es abierto.
 - b) Sea $\{A_i\}_{i=1}^n$ una familia *finita* de abiertos. Pruebe que $A := \bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto. ¿Se generaliza este resultado a intersecciones arbitrarias?, pruébelo o dé un contraejemplo.
 - c) Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de cerrados. Pruebe que $A := \bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.
 - d) Si A cerrado y B compacto, entonces $A \cap B$ es compacto.
 - e) Si A_1, \dots, A_n compactos, entonces $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es compacto.
2. a) Demuestre que el conjunto

$$C = \{(x, y) \mid \|(x, y)\|^2 = 1/k, k \in \{1, \dots, n\}\}$$
 es compacto.
 - b) ¿El conjunto

$$C' = \{(x, y) \mid \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \|(x, y)\|^2 = 1/n\}$$
 es compacto? De no ser así, ¿Qué hay de su adherencia?
 Hint: $\text{Adh}(A) = A \Leftrightarrow A$ cerrado

3. Deduzca y grafique:

- a) Las curvas de nivel y el grafo de la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

- b) Las curvas de nivel y el grafo de la función

$$f(x, y) = x + y$$