MA2001-6 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Patricio Felmer A.
Auxiliar: Diego Marchant D.

Teorema de la Función Inversa
Teorema de la Función Implícita

1. TFInverso

Toda función diferenciable se "parece" a su aproximación lineal muy cerca del punto en el cual la calculamos, esto quiere decir que se comportan muy similar. Además se sabe que una función lineal es invertible cumpliendo una pequeña condición (A continuación veremos cuál)

Veamos el caso de una función lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = mx + n = y \;\Rightarrow\; f^{-1}(y) = \frac{y-n}{m}$$

Vemos que para que la función sea invertible se necesita $m \neq 0$, es decir, que exista $\frac{1}{m} = m^{-1}$. Podemos usar este resultado y extenderlo al caso de $\mathbb{R}^n$: Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ y sea $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$L(x) = Ax + b = y \;\Rightarrow\; L^{-1}(y) = A^{-1}(y-b)$$

¿Qué ocurre si expresamos la aproximación lineal de cualquier función de clase C^1?

$$L(x) = Df(x_0)(x - x_0) = Df(x_0)x - Df(x_0)x_0$$

Si definimos $A := Df(x_0)$ y $b := Df(x_0)x_0$ entonces sólo requerimos que el jacobiano de f sea invertible!

Teorema 1. *Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase C^1. Supongamos que para $a \in \Omega$, $DF(a)$ (jacobiano) es una matriz invertible y que $F(a) = b$. Entonces*

1. *Existen abiertos U y V de $\mathbb{R}^n$ tales que $a \in U$, $b \in V$ y además $F : U \to V$ es biyectiva.*
2. *$F^{-1} : V \to U$ (la inversa de F) es de clase C^1 y $DF^{-1}(b) = [DF(a)]^{-1}$ (la matriz jacobiana de la inversa de la función es la inversa de la matriz jacobiana de la función).*

Nota: Recordar que una condición suficiente para ver que una matriz sea invertible es que su determinante sea distinto de cero.

2. TFImplícito

Supongamos tenemos la ecuación $f(x,y)=0$ donde f está definida como $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$ ¿Será posible despejar y es función de x? Es decir ¿Existirá $y(x)$ tal que $f(x,y(x))=0$?
Pues derivémosla! Por regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

o sea,

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$$

Para que la derivada implícita exista necesitamos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sea distinto de cero, es decir la derivada de f respecto a la variable a despejar, en este caso $y(x)$.
Al igual que con la función inversa requerimos que una derivada tenga recíproca, en este caso que $\dfrac{1}{\partial f/\partial y}$ exista. Para el caso general el TFImplícito permite despejar cualquier variable siempre y cuando su jacobiano sea invertible.

Teorema 2. *Sea $F:\Omega\subseteq\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ y sea $(a,b)\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ un punto tal que $F(a,b)=0$. Escribimos entonces $DF(a,b)=[D_xF(a,b)D_yF(a,b)]$ y supongamos que $D_yF(a,b)$ es invertible, entonces existen abiertos $U\subseteq\mathbb{R}^{m+n}$ con $(a,b)\in U$ y $a\in W$ tales que para cada $x\in W$ existe un único y tal que $(x,y)\in U$ y*

$$F(x,y)=0$$

esto define una función $G:W\in\mathbb{R}^n$ que es de clase $\mathcal{C}^1$ y que satisface

$$F(x,G(x))=0,\forall x\in W$$

y además

$$DG(x)=-[D_yF(x,G(x))]^{-1}D_xF(x,G(x))$$