MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliar: José Palacios A. , Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 15

19 de Agosto de 2015

1. Resumen

Definición 1. Sea $\rho : D \to \mathbb{R}$ la densidad de masa, entonces la Masa M está dada por:

$$M = \iint_D \rho(x,y)dxdy,$$

y las coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ del centro de masa están dados por:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_D x\rho(x,y)dxdy,\ \bar{y} = \iint_D y\rho(x,y)dxdy.$$

Teorema 1. *Sea Ω acotado y $f : U \to V$ continua y biyectiva. Sea $g : f(\Omega) \to \mathbb{R}$ integrable. Luego, $g \circ f : \Omega\mathbb{R}$ es integrable y*

$$\int_{f(\Omega)} g(x)dx = \int_\Omega g(f(y))|detDf(y)|dy.$$

2. Preguntas

P1. (I) Una lámina D tiene forma de semidisco de radio a. Hallar la masa de la lámina y su centro de masa, sabiendo que la densidad de masa varía proporcionalmente a la distancia al centro del lado recto de la lámina.

P2. Sea

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1,\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1\},$$

y sea la transformación $T(u,v) = \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}\right)$.

(a) Dibuje la región Ω. Además, encuentre y dibuje D tal que $T(D) = \Omega$.

(b) Calcule

$$\iint_\Omega \frac{x}{(x^2+y^2)^2}dxdy$$

P3. (a) Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{2\sqrt{2}}{3}xy$. Justifique la existencia de valores máximo y mínimo de f sobre la región

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + 2y^2 \leq 1\},$$

y luego encuentrelos.

(b) Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función homogénea de grado m, esto es,

$$f(ty) = t^m f(y), \forall y \in \mathbb{R}^N,\ \forall t > 0.$$

Suponiendo f diferenciable en $x \in \mathbb{R}^N$, demuestre que

$$mf(x) = \nabla f(x) \cdot x.$$