

MA2001-4 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Alejandro Jofré**Auxiliar:** José Palacios A. Sebastián Urzúa B.**Auxiliar 11**

06 de Julio de 2015

*A saludar a la gente***1. Resumen**

Teorema 1 (Teorema de Lagrange, condición de 1er Orden). Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables. Supongamos que x_0 es solución del problema:

$$\min_x (\max_x) f(x), \text{ s.a. } g(x) = c.$$

Entonces existe un valor $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que (x_0, λ) es mínimo (o máximo) local de la función **Lagrangeano**: $L(x, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - c)$.

Teorema 2 (Teorema de Lagrange, condición de 2do Orden). Consideremos el problema de optimización:

$$\min_x (\max_x) f(x) \text{ s.a. } g_i(x) = c, \forall i \in \{1, \dots, k\},$$

donde f, g_i son funciones diferenciables. Sea x_0 tal que $\forall i \in \{1, \dots, k\}, g_i(x_0) = 0$. Supongamos que el conjunto $\{\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)\}$ es linealmente independiente. Entonces se tiene la condición de primer orden. Además, si $H_x L(x_0, \lambda)$ es definida positiva (negativa), entonces x_0 es mínimo (máximo) local del problema de optimización.

2. Problemas

P1. Muestre que $\frac{n!}{n^{n/2}}$ es el valor máximo, en $\mathbb{R}^n$, de la función:

$$f(x) = \prod_{i=1}^n x_i$$

$$\text{s.a. } \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i^2} = 1$$

P2. El plano $x + y + 2z = 2$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ se intersectan en una elipse. Encuentre el punto más cercano y más lejano de este punto al origen.

P3. Consideremos $\mathbb{R}^n$ con la norma euclidiana. Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica (i.e. $A = A^t$). Sea entonces la función

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \rightarrow x^t A x$$

(a) Demuestre que, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

$$\nabla f(\vec{x}) = 2Ax.$$

- (b) Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ (esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$). Muestre que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ es punto crítico de f restringido a S si y sólo si x_0 es vector propio de A normalizado.
- (c) Suponga ahora que A es definida positiva (i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x^t A x > 0$). Sea $z \in \mathbb{R}^n$ no nulo, determine los puntos críticos de la función

$$g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\vec{x} \mapsto \langle z, x \rangle$$

restringida a $\mathcal{Q} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : f(\vec{x}) = 1\}$.

P4. Demuestre que

$$\left(\prod_{i=1}^N x_i \right)^{\frac{1}{N}} \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i.$$

Para esto, demuestre primero que basta considerar sólo los casos donde $\sum_{i=1}^N x_i = 1$.