MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré.
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar Extra 2

25 de Mayo de 2015
aucsiliar con tkm

P1. Encuentre todos los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = \frac{xy}{1+x^4+y^4}$$

y clasifíquelos como puntos máximos, mínimos locales o puntos silla.

Solución: Tenemos

- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y(1+x^4+y^4)-4x^4y}{(1+x^4+y^4)^2} = \dfrac{y(1-3x^4+y^4)}{(1+x^4+y^4)^2}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{x(1+x^4+y^4)-4x^4y}{(1+x^4+y^4)^2} = \dfrac{x(1-3x^4+y^4)}{(1+x^4+y^4)^2}$

Para encontrar los puntos críticos resolvemos el sistema $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, que es equivalente al sistema

$$\begin{cases} y(1+x^4+y^4)-4x^4y = 0 \\ x(1+x^4+y^4)-4xy^4 = 0 \end{cases}$$

Vemos que $(0,0)$ es punto crítico. Si $y=0$ en la primera ecuación, en la segunda obtenemos que $x(1+x^4) = 0$ que implica $x = 0$. Similarmente, si $x = 0$ en la segunda ecuación, la primera nos entrega que $y = 0$. Así, los puntos cr;iticos no nulos satisfacen:

$$\begin{cases} 1+x^4+y^4-4x^4 = 0 \\ 1+x^4+y^4-4y^4 = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones implican $x^4 = y^4$. Es decir, $|x| = |y|$. Luego, $0 = 1-3x^4+y^4 = 1-2x^4$.

Es decir, $x = \pm\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$. Similarmente, $y = \pm\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$.

Así, obtenemos 5 puntos críticos: $(0,0)$, $\left(\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}, \pm\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}\right)$.

Para determinar de qué tipo son, calculemos la matriz Hessiana.

- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-12x^3y(1+x^4+y^4)-y(1-3x^4+y^4)8x^3}{(1+x^4+y^4)^3}$.
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{(1-3x^4+y^4)(1+x^4+y^4)-y(1-3x^4+y^4)8y^3}{(1+x^4+y^4)^3}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-12xy^3(1+x^4+y^4)-x(1+x^4-3y^4)8y^3}{(1+x^4+y^4)^3}$

En particular,

$$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Que tiene valores propios 1 y -1. Por lo tanto, $(0,0)$ es punto silla.

Para el resto de los puntos, observamos que $1 + x^4 + y^4 = 2$ y que $1 - 3x^4 + y^4 = 1 + x^4 - 3y^4 = 0$, al evaluar.

Así,

$$f''((\frac{1}{2})^{1/4}, (\frac{1}{2})^{1/4}) = f''(-(\frac{1}{2})^{1/4}, -(\frac{1}{2})^{1/4}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Por lo que se trata de máximos locales y

$$f''(-(\frac{1}{2})^{1/4}, (\frac{1}{2})^{1/4}) = f''((\frac{1}{2})^{1/4}, -(\frac{1}{2})^{1/4}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

por lo que se trata de mínimos locales.

P2. *a*) Para la función

$$f(x,y) = x^2 e^{x+y}$$

encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno del punto $(x_0, y_0) = (1,0)$.

sol: El polinomio de Taylor de orden 2 tiene la forma

$$f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot (x-1,y) + \frac{1}{2}(x-1,y) f''(1,0)(x-1,y)^T.$$

Calculemos las derivadas:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x+y} + x^2 e^{x+y}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 e^{x+y}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{x+y} + 4xe^{x+y} + x^2 e^{x+y}$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2xe^{x+y} + x^2 e^{x+y}.$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 e^{x+y}.$

Evaluemos en $x = 1,\ y = 0$.

- $f(1,0) = e$
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3e$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = e$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 7e$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 3e$
- $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = e.$

Por lo tanto el polinomio de Taylor de orden 2 es

$$e\left(1+3(x-1)+y+\frac{1}{2}(7(x-1)^2+6(x-1)y+y^2)\right)$$

b) Para la función de la parte anterior, demuestre que existe una constante C tal que

$$|f(x,y)-e(1+3(x-1)+y)| \leq C||(x-1,y)||^2,$$

para todo $||(x-1,y)|| \leq 1$.
sol: Notemos que f es de clase $\mathcal{C}^2$. Por lo tanto, en la bola cerrada de centro $(1,0)$ y radio 1 las segundas derivadas parciales alcanzan su máximo y su mínimo. Es decir, podemos escribir:

- $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right| \leq C$
- $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right| \leq C$
- $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq C,$

si $||(x-1,y)|| \leq 1$. Entonces:

$$R_2(x,y) \leq \frac{C}{6}((x-1)^2+2|(x-1)y|+y^2) \leq C'||(x-1,y)||^2.$$

■

P3. Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $n \geq 3$ definida por $f(x)=g(||x||_2)$ donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de clase $\mathbb{C}^2$.

a) Pruebe que $\Delta f = \frac{n-1}{r}g'(r)+g''(r)$ donde $r=||x||_2 \neq 0$
b) Pruebe que si $\Delta f = 0$, entonces existen constantes a, b tales que

$$f(x)=\frac{a}{||x||_2^{n-2}}+b \quad , \quad x \neq 0$$