MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 6

20 de Abril de 2015

1. Resumen

Teorema 1 (Regla de la Cadena)**.** *Sean $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, f diferenciable en $x_0 \in A$, g diferenciable en $f(x_0) \in B$. Luego, $g \circ f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es diferenciable en x_0 y*

$$D(f \circ g)(x_0) = Dg(f(x_0))Df(x_0).$$

2. Problemas

P1. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ función diferenciable tal que $\nabla g(0,0) = (1,3)$. Considere la función $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$h(x,y,z) = g(f(x) + f(y)^2, f(x) + f(y)^2 + f(z)^3).$$

Encuentre el vector $\nabla h(0,0,0)$.

SOLUCAO: Para facilitar los cálculos, consideremos las variables auxiliares:

$$u(x,y,z) = f(x) + f(y)^2, \quad v(x,y,z) = f(x) + f(y)^2 + f(z)^3.$$

Así, la función h queda definida por $h(x,y,z) = g(u(x,y,z), v(x,y,z))$, y las necesitamos calcular para obtener el gradiente de h.

- $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}(x,y,z)$.
- $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z)$
- $\frac{\partial h}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z)$

De donde podemos calcular en función de f los siguientes términos:

- $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial x}{\partial x}(x,y,z) = f'(x)$
- $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y,z) = 2f(y)f'(y)$
- $\frac{\partial u}{\partial z}(x,y,z) = 0$
- $\frac{\partial v}{\partial z}(x,y,z) = 3f(z)^2 f'(z)$.

Ahora, evaluemos:

- $\frac{\partial h}{\partial x}(0,0,0) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,0,0) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,0)\frac{\partial v}{\partial x}(0,0,0) = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 4$
- $\frac{\partial h}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial g}{\partial u}(0,0)\frac{\partial u}{\partial y}(0,0,0) + \frac{\partial g}{\partial v}(0,0)\frac{\partial v}{\partial y}(0,0,0) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0$

- $\dfrac{\partial h}{\partial z}(0,0,0) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)\dfrac{\partial u}{\partial z}(0,0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0)\dfrac{\partial v}{\partial z}(0,0,0) = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0.$

  De donde los valores de $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)$ y $\dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ sale del enunciado, cuando indican que $\nabla g(0,0) = (1,3)$. De esta manera, $\nabla h(0,0,0) = (4,0,0)$.

b) Para una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ considere la ecuación diferencial en derivadas parciales:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{4x}\sin^2(y).$$

El objetivo de este problema es encontrar una solución $f(x,y)$ de la ecuación planteada, definida en todo $\mathbb{R}^2$. Para ello proponga una solución del tipo:

$$f(x,y) = g(e^x\cos(y), e^x\sin(y)),$$

encuentre una ecuación para g y resuélvala.

Su pauta piola: Siguiendo la indicación, planteamos una solución del tipo

$$f(x,y) = g(e^x\cos(y), e^x\sin(y)) = g(u(x,y), v(x,y)),$$

donde hemos definido $u(x,y) = e^x\cos(y)$ y $v(x,y) = e^x\sin(y)$.

La idea de la resolución es reemplazar las derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en términos de las derivadas parciales de g. Para ello, notemos que:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}.$

De donde identificamos directamente que:

- $\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos(y)$
- $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin(y)$
- $\dfrac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin(y)$
- $\dfrac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos(y).$

Así, reemplazando en lo anterior, tenemos que:

- $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)e^{2x}\cos(y) - 2\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)e^{2x}\sin(y)\cos(y) + \left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2 e^{2x}\sin^2(y).$
- $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)e^{2x}\sin(y) + 2\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)e^{2x}\sin(y)\cos(y) + \left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2 e^{2x}\cos^2(y).$

Y evaluando en la última ecuación que cumple originalmente f, obtenemos:

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 e^{2x}(\sin^2(y) + \cos^2(y)) + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 e^{2x}(\sin^2(y) + \cos^2(y)) = e^{4x}\operatorname{sen}^2(y)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = e^{2x}\sin^2(y) = v^2,$$

donde la última expresión se obtuvo de cancelar el término e^{2x} que acompaña a las derivadas parciales del lado izquierdo de la ecuación. Como el enunciado pide encontrar una solución del problema (cualquiera), basta que busquemos g tal que verifique:

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial v} = v$$

Lo que nos lleva a la función $g(u,v) = \frac{v^2}{2} + C$, esto es, una función f que solucione el problema original sería:

$$f(x,y) = \frac{e^{2x}\sin^2(y)}{2} + C$$

P2. (a) Considere la función:

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2x + 1 \\ \sin(3x + y - 2) \end{pmatrix}$$

Muestre que f es diferenciable en $(0,2)$ y encuentre la mejor aproximación lineal afín $T(x,y)$ de f cerca de este punto.

Su pauta piola: f es diferenciable en $(0,2)$ pues tanto $4y^2x + 1$ como $\sin(3x + y - 2)$ son diferenciables en $(0,2)$.

Recordemos que una aproximación lineal de f en x_0 está dada por la fórmula

$$L(h) = f(x_0) + Df(x_0)h$$

Calculando el Jacobiano de f:

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2 & 8yx \\ 3\cos(3x + y - 2) & \cos(3x + y - 2) \end{pmatrix}$$

Evaluando f y Df en $(0,2)$:

- $f(0,2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $Df(0,2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Así, la aproximación lineal queda:

$$L(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} 1 + 16h_1 \\ 3h_1 + h_2 \end{pmatrix}$$

(b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, una función diferenciable en el punto $(0,2)$ tal que

$$f(0,2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \ f'(0,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere la función $g(x,y) = f_1(x,y) + f_2(x,y)f_3(x,y)$. Demuestre que g es diferenciable en $(0,2)$. Encuentre el vector $\nabla g(0,2)$

yes: Notemos que g es suma y producto de funciones diferenciables en $(0,2)$. Por lo tanto, g es diferenciable en $(0,2)$. Veamos ahora el cálculo de su gradiente:

- $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) + \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)f_3(x,y) + f_2(x,y)\dfrac{\partial f_3}{\partial x}(x,y)$
- $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) + \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)f_3(x,y) + f_2(x,y)\dfrac{\partial f_3}{\partial y}(x,y)$

Notemos ahora que

$$f'(0,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,2) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,2) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x}(0,2) & \frac{\partial f_3}{\partial y}(0,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, podemos evaluar en las expresiones anteriores. Así, nos queda que $\nabla g(0,2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$