MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar - Pautranka 8

04 de Abril de 2014
Aguante cabros

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Schwarz). *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en A. Si las segundas derivadas parciales son continuas en $x_0 \in A$, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0), \ \forall i, j = 1, \cdots, n.$$

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $x_0 \in A$. Se define la **matriz Hessiana** de f en x_0 como

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2 (Teorema de Taylor de 2^{do} orden). *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^3$. Entonces:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h^T Hf(x_0)h + R_2(x_0, h),$$

donde el resto $R_2(x_0, h)$ tiene una expresión integral de la forma
$R_2(x_0, h) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2}\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x_0 + h)h_i h_j h_k dt$ *y* $|R_2(x_0, h)| \le M||h||^3$. *Así, en particular,*

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(x_0, h)}{||h||^2} = 0.$$

2. Problemas y Solución Tranka

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Se define el laplaciano de f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Y la ecuación de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

Suponga que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, función dos veces diferenciable, satisface la ecuación de Laplace. Pruebe que $v(s, t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$ también satisface la ecuación de Laplace.

SOLUCIÓN: Calculemos las derivadas parciales de v hasta el segundo orden, para comprobar que satisface la ecuación de Laplace. Definimos $x(s, t) = st$, $y = \frac{1}{2}(s^2 - t^2)$.

- $\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}t + \frac{\partial u}{\partial y}s$

- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial s^2} = t\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\dfrac{\partial x}{\partial s} + t\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\dfrac{\partial y}{\partial s} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + s\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\dfrac{\partial x}{\partial s} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\dfrac{\partial x}{\partial s}\right) = t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + st\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + st\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + s^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.
- $\dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial u}{\partial x}s + \dfrac{\partial u}{\partial y}(-t)$
- $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = s\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}s + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(-t)\right) - \dfrac{\partial u}{\partial y} - t\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}s + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(-t)\right) = s^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - st\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} - st\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + t^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

  Para concluir, calculemos Δv

$$\begin{aligned}\Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = s^2\Delta u + t^2\Delta u + st\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= (s^2 + t^2)\Delta u = 0\end{aligned}$$

$\blacksquare$

P2. Suponga que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial:

$$y^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

y considere el cambio de variables $u(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ y $v(x, y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$. Pruebe que la ecuación se transforma en:

$$2(u^2 - v^2)\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = y\frac{\partial F}{\partial v} - v\frac{\partial F}{\partial u}.$$

SOLUCIONEKE: Sea $F(x, y) = G(u(x, y), v(x, y))$. Queremos encontrar la ecuación que satisface G.

- $\dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial u}(-x) + \dfrac{\partial G}{\partial v}(x) = -xG_u + xG_v$
- $\dfrac{\partial F}{\partial y} = yG_u + yG_v$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -G_u - x(G_{uu}(-x) + G_{vu}x) + G_v + x(G_{uv}(-x) + G_{vv}x) = G_v - G_u + x^2(G_{uu} - G_{uv} + G_{vv})$
- $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = G_u + G_v + y(G_{uu}y - G_{uv}y + G_{vu}y + G_{vv}y) = G_u + G_v + y^2(G_{uu} + 2G_{uv} + G_{vv})$.

Además, notamos que $u + v = y^2$ y que $v - u = x^2$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}0 &= y^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ &= (u + v)(G_v - G_u + (v - u)(G_{uu} - 2G_{uv} + G_{vv})) - (v - u)(G_u + G_v + (u + v)(G_{uu} + 2G_{uv} + G_{vv})) \\ &= u(G_v - G_u + G_u + G_v) + v(G_v + G_u + G_u - G_v) + (v^2 - u^2)(G_{uu} - 2G_{uv} + G_{vv} - G_{uu} - 2G_{uv} - G_{vv}) \\ &= 2(uG_v - vG_u - 2(u^2 - v^2)G_{uv})\end{aligned}$$

Así, finalmente, $2(u^2 - v^2)G_{uv} = uG_v - vG_u$.

$\blacksquare$

P3. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) + x^2 y.$$

(I) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para f entorno al punto $(0, 0)$.

(II) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y pruebe que

$$|f(h_1, h_2) - P_2(h_1, h_2)| \leq \frac{40}{3}||(h_1, h_2)||^3,$$

donde P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f entorno de $(0, 0)$.

SOLUCION apañadora:

Sea $f(x, y) = \sin^2(x+y)+x^2y$. Su gradiente está dado por $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\sin(x + y)\cos(x + y) + 2xy \\ 2\sin(x + y)\cos(x + y) + x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen}(2x + 2y) + 2xy \\ \text{sen}(2x + 2y)) + x^2 \end{pmatrix}$. Así, al evaluar, $\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ahora, calculando el Hessiano, $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(2x + 2y)2 + 2y & \cos(2x + 2y) + 2x \\ \cos(2x + 2y)2 + 2x & \cos(2x + 2y)2 \end{pmatrix}$. Al evaluar, $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Luego, escribimos el polinomio de taylor:

$$\begin{aligned} p_2(h_1, h_2) &= f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} H_f(0, 0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 & h_1 + h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 = ||(h_1, h_2)||^2. \end{aligned}$$

Calculemos ahora el resto de Taylor. Para esto, calculemos las terceras derivadas.

- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3} = -4\sin(2x + 2y)$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -4\sin(2x + 2y) + 2$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = -4\sin(2x + 2y)$
- $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3} = -4\sin(2x + 2y)$.

$$\begin{aligned} |R_2(x_0, h)| &\leq \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \left| \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(th_1, th_2) h_i h_j h_k \right| dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} | - 4\sin(2th_1 + 2th_2)h_1^3| + | - 4\sin(2th_1 + 2th_2) + 2|h_1^2||h_2| \\ &+ | - 4\sin(2th_1 + 2th_2)|h_2^2||h_1| + | - 4\sin(2th_1 + 2th_2)||h_3^2|dt \\ &\leq \frac{1}{6}(4|h_1|^3 + 6h_1^2|h_2| + 4|h_1|h_2^2 + 4|h_3|^2) \leq \frac{4}{6}(|h_1| + |h_2|)^3 \leq \frac{4}{6}\left(2\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)^3 = \frac{32}{6}||(h_1, h_2)||^3 \end{aligned}$$

■

P4. Sea $g(x,y) = xye^{x^2+2y^2}$. Explicite un polinomio de dos variables $T(x,y)$ que cumpla:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - T(x,y)}{x^4+y^4} = 0.$$

Solución en caso DE: Consideremos $\phi(t) = e^t$. Haciendo Taylor en torno a 0 de ϕ:

$$\begin{aligned}\phi(h) &= \phi(0) + \phi'(0)h + \frac{1}{2}\phi''(th)h^2, t \in [0,1]\\ &= e^0 + e^0 h + \frac{1}{2}\phi(th)h^2.\end{aligned}$$

Con esto,

$$f(x,y) = xy\phi(x^2+2y^2) = xy(1 + x^2 + 2y^2 + \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}(x^2+2y^2)).$$

Definamos $T(x,y) = xy(1 + x^2 + 2y^2)$. Sigue que

$$f(x,y) - T(x,y) = \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}(x^2+2y^2)^2 xy.$$

Ahora, acotamos para obtener el resultado pedido.

$$\begin{aligned}\frac{|f(x,y) - T(x,y)|}{x^4+y^4} &= \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}\frac{(x^2+2y^2)^2|xy|}{x^4+y^4}\\ &= \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}|xy|\left(\frac{x^4+4x^2y^2+4y^4}{x^4+y^4}\right) = \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}|xy|\left(1 + \frac{4x^2y^2}{x^4+y^4}\right)\\ &\leq \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}|xy|\left(1 + \frac{2(x^4+y^4)+3y^2}{x^4+y^4}\right)\\ &= \frac{1}{2}e^{t(x^2+2y^2)}|xy|\left(1 + 2 + \frac{3y^2}{x^4+y^4}\right) \to 0\end{aligned}$$

cuando $(x,y) \to (0,0)$.

Pauta hecha contkm