MA2001-4 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Alejandro Jofré
Auxiliar: José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 8

04 de Abril de 2014
Aguante cabros

1. Resumen

Teorema 1 (Teorema de Schwarz)**.** *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable en A. Si las segundas derivadas parciales son continuas en $x_0 \in A$, entonces:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0),\ \forall i, j = 1, \cdots, n.$$

Definición 1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $x_0 \in A$. Se define la **matriz Hessiana** de f en x_0 como

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Teorema 2 (Teorema de Taylor de 2^{do} orden)**.** *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^3$. Entonces:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0)h + \frac{1}{2}h^T Hf(x_0)h + R_2(x_0, h),$$

donde el resto $R_2(x_0, h)$ tiene una expresión integral y $|R_2(x_0, h)| \leq M||h||^3$. Así, en particular,

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(x_0, h)}{||h||^2} = 0.$$

2. Problemas

P1. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Se define el laplaciano de f como:

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Y la ecuación de Laplace:

$$\Delta f = 0.$$

Suponga que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, función dos veces diferenciable, satisface la ecuación de Laplace. Pruebe que $v(s, t) = u(st, \frac{1}{2}(s^2 - t^2))$ también satisface la ecuación de Laplace.

P2. Suponga que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación diferencial:

$$y^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$

y considere el cambio de variables $u(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2}$ y $v(x, y) = \frac{y^2 + x^2}{2}$. Pruebe que la ecuación se transforma en:

$$2(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = y \frac{\partial F}{\partial v} - v \frac{\partial F}{\partial u}.$$

P3. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \sin^2(x + y) + x^2 y.$$

(I) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 para f entorno al punto $(0, 0)$.

(II) Muestre que f es de clase $\mathcal{C}^3$ y pruebe que

$$|f(h_1, h_2) - P_2(h_1, h_2)| \leq \frac{40}{3} ||(h_1, h_2)||^3,$$

donde P_2 es el polinomio de Taylor de orden 2 de f entorno de $(0, 0)$.

P4. Sea $g(x, y) = xye^{x^2+2y^2}$. Explicite un polinomio de dos variables $T(x, y)$ que cumpla:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x, y) - T(x, y)}{x^4 + y^4} = 0.$$