**MA2001-4 Cálculo en Varias Variables**
**Profesor:** Alejandro Jofré.
**Auxiliar:** José Palacios A., Sebastián Urzúa B.

# Auxiliar Extra 1

15 de Abril de 2014

**P1.** (a) Encuentre, justificando claramente sus respuestas, adherencia, interior y frontera en $\mathbb{R}^2$ de los siguientes conjuntos. Justifique además si son abiertos, cerrados y/o compactos.

$$A = \left\{ \left( \frac{1}{m}, \frac{1}{n} \right) : m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}, \; B = \left\{ x, y : \exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{n} \right\}.$$

(b) Considere el conjunto:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Encuentre la adherencia, el interior y la frontera de $A$. Es un abierto o cerrado? Justifique su respuesta.

(c) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ conjuntos no vacios. Pruebe que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

**P2.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1+x^2+y^2)+x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \gamma, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Encuentre $\gamma$ de modo que $f$ sea continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$.

(c) Calcule, si es que existen, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(d) Calcule de manera genérica las derivadas direccionales de $f$.

(e) Determine en qué puntos son continuas las derivadas parciales de $f$.

**P3.** Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función continua tal que:

- $f(0) > 0$
- $f(x) < 0$ para todo $x$ con $||x|| > 1$.

Demuestre que existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ tal que $f(x) \leq f(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^N$.

**P4.** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^6}{||(x,y)||} & (x, y) \neq 0 \\ 0 & (x, y) = 0 \end{cases}$$

(I) Demuestre que $f$ es una función continua.

(II) Demuestre que $f$ alcanza su mínimo.