

CURSO : MA22A-01 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 28 / 08 / 2002

TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #1

1.- Sea E el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a n . En E se define la función

$$N : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ por: } N(p) = \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)|$$

a) Demuestre que N es una norma en E

b) Encuentre $L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall p \in E \quad N(p) \leq L \cdot \max |a_i|$ con $i = 0, \dots, n$ donde $p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$

c) Sea $M = \{p \in E \mid p(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n\}$. Determine $M \cap B_N(0,1)$

2.- a) Determine la adherencia e interior de los siguientes conjuntos:

$$i) A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \dots, 0 \leq y \leq 1 \right\}$$

$$ii) B = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$iii) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 < 1\}$$

b) En el espacio vectorial $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ de las matrices reales de dimensión 2×2 se define:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \sum_{j=1}^2 |a_{ij}| \right\}$$

i) Probar que $\|\cdot\|_{\infty}$ es norma en $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

ii) Estudie la convergencia de la sucesión $\{A_n\}$ definida por:

$$A_n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 1/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.- a) Demuestre que si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un cerrado o un abierto, entonces $\text{int}(Fr(A)) = \emptyset$

¿Es cierto este resultado para cualquier conjunto A ? Justifique su respuesta.

b) Sea X un conjunto con dos métricas \mathbf{r} y \mathbf{s} definidas en él.

1.- Pruebe que $\mathbf{r}(x, y) + \mathbf{s}(x, y)$ es una métrica.

2.- Suponga que $\mathbf{r}(x, y) \leq \mathbf{s}(x, y) \quad \forall x, y \in X$. Probar que $S \subset X$ es cerrado con respecto a \mathbf{s} si éste es cerrado con respecto a \mathbf{r} .

c) Estudie el límite de la siguiente función en el origen:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2} & \text{si } (x, y) = (0,0) \\ 0 & \text{si } (x, y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Control #1

1
a) $N(p) = \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)|$ con $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$

$N(p)$ es norma.

i) $0 \leq N(p) < +\infty$ directo

ii) $N(p) = 0 \Leftrightarrow p(t) = 0$

\Leftarrow trivial.

\Rightarrow $N(p) = 0 \Rightarrow \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)| = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 |p'(t)| dt = -|p(0)| \leq 0$

$\Rightarrow \int_0^1 |p'(t)| dt = 0 \Rightarrow p'(t) = 0 \quad \forall t \in [0, 1]$

$\Rightarrow p(t) = \text{cte} \cdot \cancel{p(0)} \Rightarrow p(t) = p(0)$

pero $|p(0)| = 0 \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow p(t) = 0 \quad \forall t.$

iii) $N(\lambda p) = |\lambda| N(p)$

$N(\lambda p(t)) = \int_0^1 |\lambda p'(t)| dt + |\lambda p(0)| = |\lambda| \left(\int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)| \right) = |\lambda| N(p(t))$

iv) $N(p(t) + q(t)) \leq N(p(t)) + N(q(t))$

$|p'(t) + q'(t)| \leq |p'(t)| + |q'(t)| \quad \int_0^1 \quad \times \quad |p(0) + q(0)| \leq |p(0)| + |q(0)|$
 $\Rightarrow \int_0^1 |p'(t) + q'(t)| dt + |p(0) + q(0)| \leq \int_0^1 |p'(t)| dt + \int_0^1 |q'(t)| dt + |p(0)| + |q(0)|$
 $\leq N(p(t)) + N(q(t))$

1) b) PDQ: $\exists L \in \mathbb{R} / \forall p \in E \quad N(p) \leq L \cdot \max_{i=0, \dots, n} |a_i|$

Sea $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k \Rightarrow p'(t) = \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1}$

$$\begin{aligned} N(p(t)) &= \int_0^1 |p'(t)| dt + |p(0)| \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1} \right| dt + |a_0| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{k=1}^n k |a_k| t^{k-1} dt + |a_0| \\ &\leq \sum_{k=1}^n k |a_k| \int_0^1 t^{k-1} dt + |a_0| \\ &\leq \sum_{k=1}^n k |a_k| \left. \frac{t^k}{k} \right|_0^1 + |a_0| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + |a_0| \end{aligned}$$

Sea $a_{\max} = \max_{i=0, \dots, n} |a_i|$

$$\leq n \cdot a_{\max} + a_{\max} = \underbrace{(n+1)}_L a_{\max}$$

$N(p(t)) \leq L \cdot a_{\max}$ □

c) $M = \{ \lambda p(t) / \lambda \in \mathbb{R} \} \quad p(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n$
 Calculemos $M \cap B_N(0, 1)$

$M \cap B_N(0, 1) = \{ \lambda p(t) \in M / N(\lambda p(t)) \leq 1 \}$

$N(\lambda p) < 1 \Rightarrow |\lambda| N(p) < 1 \Rightarrow N(p) < \frac{1}{|\lambda|} \quad \text{con } |\lambda| \neq 0$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow \lambda p = 0 \Rightarrow N(\lambda p) = 0 \Rightarrow p = 0 \in M \cap B_N(0, 1)$

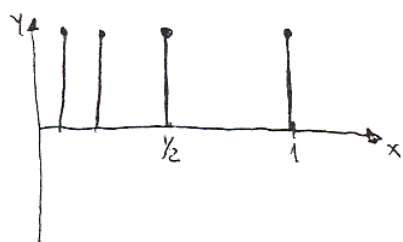
Pero $N(p) = \int_0^1 \underbrace{|1 + 2t + 3t^2 + \dots + n t^{n-1}|}_{>0} dt + |1| = \int_0^1 (1 + 2t + 3t^2 + \dots + n t^{n-1}) dt + 1$
 $= \left. 1t + 2 \frac{t^2}{2} + 3 \frac{t^3}{3} + \dots + n \frac{t^n}{n} \right|_0^1 + 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ veces}} + 1 = (n+1)$

$\Rightarrow n+1 \leq \frac{1}{|\lambda|} \Rightarrow |\lambda| < \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lambda \in \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right) \Rightarrow M \cap B_N(0, 1) = \{ \lambda p / \lambda \in \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right) \}$

Control 1

2) a)

$$i) A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq y \leq 1 \}$$



$$\text{Int}(A) = \emptyset$$

$$\text{Adh}(A) = A \cup \{ (0, y) \mid 0 \leq y \leq 1 \}$$

$$ii) B = \{ (x, y, z) / x + y + z = 1 ; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \}$$

$$\text{Adh}(B) = B \quad \text{Int}(B) = \emptyset$$

$$iii) C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - y^2 < 1 \}$$

$$\text{Int}(C) = C \quad \text{Adh}(C) = \{ (x, y) / x^2 - y^2 \leq 1 \}$$

$$b) \|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq 2} \left\{ \sum_{j=1}^2 |a_{ij}| \right\} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \|A\|_{\infty} = \max \{ |a_{11}| + |a_{12}| ; |a_{21}| + |a_{22}| \}$$

i) $\|A\|_{\infty}$ es norma

$$I) \quad 0 \leq \|A\|_{\infty} < +\infty \quad \text{directo.}$$

$$II) \quad \|A\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\Leftarrow directo

$$\Rightarrow \|A\|_{\infty} = 0 = \max \{ |a_{11}| + |a_{12}| ; |a_{21}| + |a_{22}| \}$$

$$\text{Si } |a_{11}| + |a_{12}| = 0 \Rightarrow |a_{11}| = |a_{12}| = 0 \Rightarrow |a_{21}| = |a_{22}| = 0$$

$$\text{Si } |a_{21}| + |a_{22}| = 0 \Rightarrow |a_{21}| = |a_{22}| = 0 \Rightarrow |a_{11}| = |a_{12}| = 0$$

Control 1

2) b) i)

$$\begin{aligned} \text{III)} \quad \| \lambda A \|_{\infty} &= \max \{ |\lambda a_{11}| + |\lambda a_{12}| ; |\lambda a_{21}| + |\lambda a_{22}| \} \\ &= \max \{ |\lambda| (|a_{11}| + |a_{12}|) ; |\lambda| (|a_{21}| + |a_{22}|) \} \\ &= |\lambda| (|a_{11}| + |a_{12}| ; |a_{21}| + |a_{22}|) = |\lambda| \|A\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{IV)} \quad \|A+B\|_{\infty} &= \max \{ |a_{11}+b_{11}| + |a_{12}+b_{12}| ; |a_{21}+b_{21}| + |a_{22}+b_{22}| \} \\ &\leq \max \{ |a_{11}| + |a_{12}| + |b_{11}| + |b_{12}| ; |a_{21}| + |a_{22}| + |b_{21}| + |b_{22}| \} \\ &\leq \max \{ |a_{11}| + |a_{12}| ; |a_{21}| + |a_{22}| \} + \max \{ |b_{11}| + |b_{12}| ; |b_{21}| + |b_{22}| \} \\ &\leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty} \end{aligned}$$

$\therefore \|A\|_{\infty}$ es norma en $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

$$\text{ii)} \quad A_n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 1/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En efecto

$$\|A_{2n} - A\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1/2n \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

Pero

$$A_{2n+1} = \begin{bmatrix} -1 & 1/2n+1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A_{2n+1} - A\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1/2n+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \frac{1}{2n+1} < \varepsilon$$

Si A_n converge entonces toda subsecuencia converge al mismo límite

$\therefore A_n$ no es convergente.

Control #1

3]

a) $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto o cerrado $\Rightarrow \text{Int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$

Dem

$$\text{Fr}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^n / \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \}$$

Es claro que $\forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

pero $B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \Rightarrow B(x, \varepsilon) \not\subset A \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\therefore \text{Int}(\text{Fr}(A)) = \emptyset$$

No es válido para cualquier conjunto: Sea $A = \mathbb{Q}$ (rationales).

b) $\rho(x, y)$ $\sigma(x, y)$ métricas.

I- $\beta(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(x, y)$ es métrica.

I- $0 \leq \beta(x, y) < +\infty$ directo

II- $\beta(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(x, y) = \rho(y, x) + \sigma(y, x) = \beta(y, x) \quad \checkmark$

III $\beta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

\Leftarrow si $x = y \Rightarrow \beta(x, y) = \beta(x, x) = \rho(x, x) + \sigma(x, x) = 0$

\Rightarrow $\beta(x, y) = 0 \Rightarrow \rho(x, y) + \sigma(x, y) = 0 \Rightarrow \rho(x, y) = -\sigma(x, y) \geq 0$

$\Rightarrow \rho(x, y) = \sigma(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

IV $\beta(x, y) \leq \beta(x, z) + \beta(z, y)$

$$\beta(x, y) = \rho(x, y) + \sigma(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) + \sigma(x, z) + \sigma(z, y) = \beta(x, z) + \beta(z, y)$$

2- Si $\forall x, y \in X \ \rho(x, y) \leq \sigma(x, y) \Rightarrow S \subset X$ es cerrado q/r a σ si lo es q/r a ρ .

Sea $x_n \rightarrow x$ con la métrica $\sigma \Rightarrow \lim \sigma(x_n, x) = 0$

P.D.A. $x \in S$

$0 \leq \lim \rho(x_n, x) \leq \lim \sigma(x_n, x) \Rightarrow \lim \rho(x_n, x) = 0$ pero S es cerrado

c/r a $\rho \Rightarrow x \in S \quad \therefore S$ es cerrado c/r. a ρ .

$$c) \quad \underline{I} \quad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{0}} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}$$

$$\text{Sea } x=0 \quad y=y \Rightarrow \underline{I} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{0+y^2} = 0$$

$$x=y \Rightarrow \underline{I} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 - 0} = 1$$

$\Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$