

Control 1 MA2A1, 2008

1.

- (a) Para una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ considere la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = e^{4x} \sin^2 y.$$

Se le pide encontrar una solución $f(x, y)$ de este problema, definida en todo \mathbb{R}^2 . Para ello, busque una solución de la forma

$$f(x, y) = g(e^x \cos y, e^x \sin y),$$

y encuentre una ecuación para g .

- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $\nabla g(0, 0) = (1, 3)$. Considere la función de 3 variables

$$h(x, y, z) = g(f(x) + f(y)^2, f(x) + f(y)^2 + f(z)^3).$$

Encuentre el vector $\nabla h(0, 0, 0)$.

2.

- (a) Sea $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 - y^2),$$

Demuestre que f es diferenciable en Ω y encuentre la ecuación del plano tangente al grafo de f para todos los puntos de $(x, y) \in \Omega$ tal que $x = y$.

- (b) Estudie diferenciabilidad de la función $f(x, y) = |x + y|$ en el conjunto $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$. En particular determine todos los puntos donde f es diferenciable.

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/|x|} e^{|y|}}{|x|+|y|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Demuestre que $f(x, y)$ es una función continua.
(b) ¿ Es $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty$?
(c) Demuestre que la función f alcanza su mínimo.

1) (a)

(3 points)

(1)

$$f(x,y) = g(e^x \cos y, e^x \sin y), \quad u = e^x \cos y, \\ v = e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g_u e^x \cos y + g_v e^x \sin y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -g_u e^x \sin y + g_v e^x \cos y$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = g_u^2 e^{2x} \cos^2 y + 2g_u g_v e^{2x} \cos y \sin y \\ + g_v^2 e^{2x} \sin^2 y + g_u^2 e^{2x} \sin^2 y - 2g_u g_v e^{2x} \cos y \sin y \\ + g_v^2 e^{2x} \cos^2 y$$

$$= g_u^2 e^{2x} + g_v^2 e^{2x} = e^{4x} \sin^2 y$$

$$\Rightarrow g_u^2 + g_v^2 = e^{2x} \sin^2 y = v^2$$

$$\Rightarrow \text{si } g_u = 0, \quad g_v = v, \quad \text{la fonction } g \\ \text{est une solution}$$

$$\Rightarrow g(u,v) = \frac{1}{2} v^2 \quad \text{est une solution}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = \frac{1}{2} (e^x \sin y)^2 = \frac{1}{2} e^{2x} \sin^2 y$$

1) (b)

(3 points)

②

$$\nabla h = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right), \quad u = f(x) + f(y)^2$$

$$v = f(x) + f(y)^2 + f(z)^3$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} f'(x) + \frac{\partial g}{\partial v} f'(x)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \frac{\partial g}{\partial u} f'(y) f(y) + \frac{\partial g}{\partial v} (2 f'(y) f(y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial v} 3 f^2(z) f'(z)$$

$$u(0,0) = f(0) + f(0)^2 = 0$$

$$v(0,0) = f(0) + f(0)^2 + f(0)^3 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = 1, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(0,0) = 3$$

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0,0) = 1 + 3 = 4$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(0,0,0) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial z}(0,0,0) = 0$$

$$\Rightarrow \nabla h(0,0,0) = (4, 0, 0)$$

2) (a)

3 puntos

③

 $x^2 - y^2$ es diferenciable (polinomio) $x^2 + y^2$ es diferenciable (polinomio) $\sqrt{x^2 + y^2}$ es diferenciable (composición de funciones diferenciables) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} (x^2 - y^2)$ es diferenciable como producto de funciones diferenciables.

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 2x\sqrt{x^2 + y^2}, \frac{y(x^2 - y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 2y\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

$$\nabla f(x, y)|_{x=y} = (2x\sqrt{2x^2}, -2x\sqrt{x^2}) = (2\sqrt{2}x^2, -2\sqrt{2}x^2)$$

Ecuación del plano tangente en (x_0, y_0)

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = z - z_0$$

Cuando $x_0 = y_0$:

$$2\sqrt{2}(x - x_0)x_0^2 - 2\sqrt{2}(y - x_0)x_0^2 = z - z_0$$

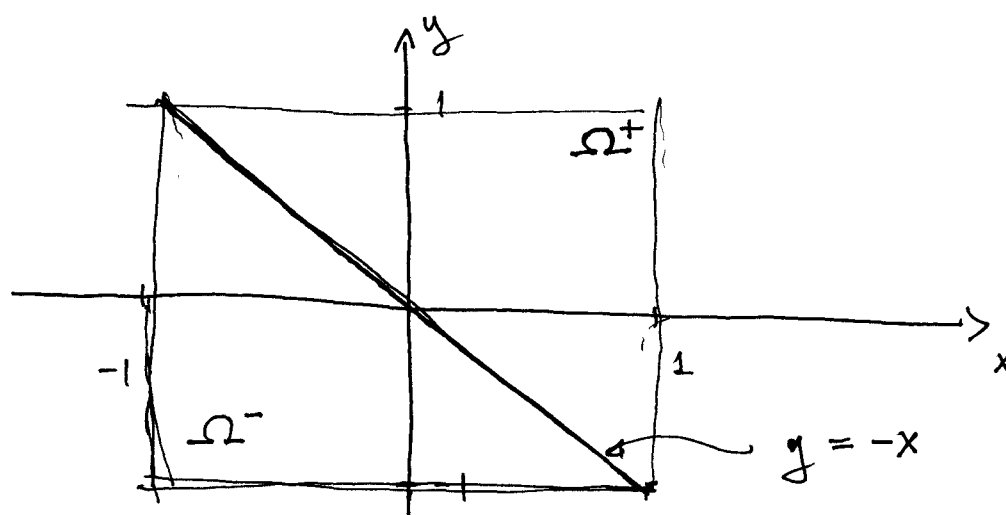
2) (b)

3 puntos

4

$$f(x, y) = |x+y| = \begin{cases} x+y & \text{cuando } x+y \geq 0 \\ -(x+y) & \text{cuando } x+y < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+y, & \text{cuando } x \geq -y \\ -(x+y) & \text{cuando } x < -y \end{cases}$$



En conjunto abierto $\Omega^+ = \Omega \cap \{x > -y\}$, f es diferenciable pues $f(x, y) = x+y$ (polinomio, función afín) en este conjunto. Lo mismo pasa en $\Omega^- = \Omega \cap \{x < -y\}$

Sea $x_0 = -y_0$ fijo. $(x_0, y_0) \in \Omega \Rightarrow f(x_0, y_0) = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

\Rightarrow no existe $\frac{\partial f}{\partial x}$ para (x_0, y_0) tales que $x_0 = -y_0$

$\Rightarrow f$ no es diferenciable en los puntos de la recta $x = -y$.

3) (a) (2 puntos)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{-1/|x|} e^{|y|}}{|x| + |y|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f es continua $\forall (x,y)$ tal que $x \neq 0$
como composición de funciones continuas.

Además; $\forall y \in \mathbb{R}$ fijo

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-1/|x|} e^{|y|}}{|x| + |y|} \right)$$

$$= 0 \quad (\text{usando por ejemplo que } \lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = 0, \text{ cálculo 1 año})$$

(2 puntos)

(b) Consideremos dos sucesiones (por ejemplo)

$$x_n = n, y_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n, 1)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1/n} e^1}{n+1} = 0$$

$$x_n = 1, y_n = n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(1, n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1} e^n}{n+1} = \infty$$

Ambos límites deberían ser iguales ~~pero~~ para que existiera $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x,y)$. Entonces el límite no existe. (y no es igual a $+\infty$ en particular)

3) (c) (2 puntos)

(6)

$$f(x,y) = \frac{e^{-1/|x|} e^{|y|}}{|x| + |y|} \geq 0$$

$$\text{y } f(0,0) = 0$$

$\Rightarrow f$ alcanza su mínimo en $(x,y) = (0,0)$