

CURSO: MA22A-05 CALCULO EN VARIAS VARIABLES

PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR

FECHA: 21 / 04 / 2004

TIEMPO: 3 HORAS

CONTROL #1

1.-Comente las siguientes afirmaciones. Si son verdaderas demuéstrelas, si son falsas de un contraejemplo.

a) Sea $(R^n, \|\cdot\|)$ un e.v.n, $A \subset R^n$ abierto, $B \subset R^n$ cualquiera y $x_0 \in R^n$. Se define

$$A + B = \{x + y \in R^n / x \in A \wedge y \in B\}$$

entonces es $A+B$ es abierto, pero $A + \{x_0\}$ no es abierto ni cerrado.

b) Sea (E, d) un e.m. y $A \subset E$ un conjunto finito. Sea $B = \{x \in E / d(x, y) \leq 1 \text{ para alg } \acute{u}n y \in A\}$. Entonces B es cerrado. ¿Qué sucede si d es la métrica discreta? ¿Es B abierto?

c) Sea (E, d) un e.m. y $x_0 \in E$. Sea $A = \{x \in E / d(x, x_0) \leq r\}$ entonces $Int(A) = \{x \in E / d(x, x_0) < r\}$

d) Sea $(R^n, \|\cdot\|)$ un e.v.n, $A, B \subset R^n$. Si $A \subset B$ entonces $Fr(A) \subset Fr(B)$

indic. Recuerde que $Fr(A) = adh(A) \cap adh(A^c)$

e) Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $(R^n, \|\cdot\|)$. Si $\|x_k\| \leq 1 \quad \forall k \in N$. Entonces su límite x también cumple $\|x\| \leq 1$.

Si $\|x_k\| < 1$ ¿Se cumple que $\|x\| < 1$?

f) Sea (E, d) un e.m. y $\{x_k\}$ una sucesión de Cauchy en (E, d) . Si $\{x_k\}$ posee una subsucesión convergente a x entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

2.- Sea $L: R^n \rightarrow R^m$ una función lineal donde ambos conjuntos están dotados de una norma.

a) (1 punto) Demuestre que $\exists A \in R \quad \|L(u) - L(v)\| \leq A\|u - v\| \quad \forall u, v \in R^n$. Determine A .

b) (1 punto) ¿Es L continua? Justifique.

c) (2 puntos) Muestre que $Ker(L) = \{x \in R^n / L(x) = 0\}$ es cerrado.

d) (2 puntos) Demuestre que L es inyectiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 / \|L(x)\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in R^n$

3.-

a) (2 ptos.) Dibuje las siguientes superficies de nivel por separado. Indique los puntos principales de intersección con los ejes.

i) $8 - z = 2x^2 + 2y^2$

ii) $x^2 - y^2 + z^2 = 16$

b) (4 puntos) Estudie la continuidad de las siguientes funciones en el origen. Si no es continua ¿es posible reparar la discontinuidad?

i)
$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{z^2 + x^2 y^2} & \text{si } xy \neq 0 \vee z \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \wedge z = 0 \end{cases}$$

ii)
$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

iii)
$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

CURSO: MA22A-05 CALCULO EN VARIAS VARIABLES
PROFESOR: MARCELO LESEIGNEUR
FECHA: 21 / 04 / 2004

PAUTA CONTROL #1

1.-Comente las siguientes afirmaciones. Si son verdaderas demuéstrelas, si son falsas de un contraejemplo.

a) Sea $(R^n, \|\cdot\|)$ un e.v.n, $A \subset R^n$ abierto, $B \subset R^n$ cualquiera y $x_0 \in R^n$. Se define

$$A+B = \{x+y \in R^n / x \in A \wedge y \in B\}$$

entonces es $A+B$ es abierto, pero $A+\{x_0\}$ no es abierto ni cerrado.

Solución

$A+B$ es abierto.

En efecto, sea $w \in A+B \Rightarrow w = x+y \quad x \in A \wedge y \in B$

Como A es abierto $\exists \quad B(w, \epsilon) \subset A$

PDQ $B(w, \epsilon) \subset A+B \quad B = \{y\}$

Sea $z \in B(w, \epsilon) \Rightarrow \|z-w\| < \epsilon \Rightarrow \|z-(x+y)\| < \epsilon \Rightarrow \|(z-y)-x\| < \epsilon \Rightarrow z-y \in B(w, \epsilon) \subset A$

Como $y \in B \Rightarrow (z-y)+y \in A+B \Rightarrow z \in A+B \Rightarrow A+B = \bigcup_{y \in B} A+\{y\} \quad \text{abierto.}$

Por lo anterior la afirmación $A+\{x_0\}$ es falsa.

b) Sea (E, d) un e.m. y $A \subset E$ un conjunto finito. Sea $B = \{x \in E / d(x, y) \leq 1 \text{ para algún } y \in A\}$. Entonces B es cerrado. ¿Qué sucede si d es la métrica discreta? ¿Es B abierto?

Solución

La afirmación es verdadera

Sea $B \neq \emptyset \Rightarrow \text{PDQ} \quad B^c \quad \text{abierto} \quad A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Sea $z \in B^c \Rightarrow d(z, y_i) > 1 \quad \forall y_i \in A \quad \text{definamos} \quad \epsilon = \min \{d(z, y_1) - 1, \dots, d(z, y_n) - 1\} > 0$

Sea

$x \in B(z, \frac{\epsilon}{2}) \Rightarrow d(x, z) < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow d(y_i, z) \leq d(x, y_i) + d(x, z) \Rightarrow d(x, y_i) \geq d(y_i, z) - \frac{\epsilon}{2} > 1 \Rightarrow x \in B^c \Rightarrow B \quad \text{cerrado}$

Si d es la métrica discreta se tiene que $B = E$, que es abierto y cerrado.

c) Sea (E, d) un e.m. y $x_0 \in E$. Sea $A = \{x \in E / d(x, x_0) \leq r\}$ entonces $\text{Int}(A) = \{x \in E / d(x, x_0) < r\}$

Solución

La afirmación es falsa.

Sea $d = d_{0-1} \quad x_0 \in E \quad r = 1 \Rightarrow A = \{x \in E / d(x, x_0) \leq 1\} = E \Rightarrow \text{Int}(A) = E$

Por otro lado $\{y \in E / d(y, x_0) < 1\} = \{x_0\} \neq E$, si E tiene más de un punto.

d) Sea $(R^n, \|\cdot\|)$ un e.v.n, $A, B \subset R^n$. Si $A \subset B$ entonces $Fr(A) \subset Fr(B)$

indic. Recuerde que $Fr(A) = adh(A) \cap adh(A^c)$

Solución

La afirmación es falsa

$$\text{Sea } A = \{x \in R / x \in [0,1] \wedge x \in Q\} \Rightarrow Fr(A) = [0,1] \quad B = [0,1] \Rightarrow Fr(B) = \{0,1\}$$

e) Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $(R^n, \|\cdot\|)$. Si $\|x_k\| \leq 1 \quad \forall k \in N$. Entonces su límite x también cumple $\|x\| \leq 1$.

Si $\|x_k\| < 1$ ¿Se cumple que $\|x\| < 1$?

Solución

La afirmación es verdadera

$B = \{y \in R^n / \|y\| \leq 1\}$ es cerrado, entonces si $x_k \in B \Rightarrow \lim x_k = x \in B$ por definición de cerrado.

Si $\|x_k\| < 1$ entonces $\|x\| < 1$ es falso.

$$\text{Sea } x_k = 1 - \frac{1}{k} \text{ entonces } \lim x_k = 1$$

f) Sea (E, d) un e.m. y $\{x_k\}$ una sucesión de Cauchy en (E, d) . Si $\{x_k\}$ posee una subsucesión convergente a x entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$

Solución

La afirmación es verdadera

Sea $\{x_k\}$ una sucesión de Cauchy en (E, d) y $\{x_{j(k)}\} \rightarrow x$ una subsucesión

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in N / \forall m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Como } \{x_{j(k)}\} \rightarrow x \quad \exists k_0 > n_0 / \forall k > k_0 \Rightarrow d(x_{j(k)}, x) < \frac{\epsilon}{2}$$

$$\text{Luego } d(x_m, x) \leq d(x_m, x_{k_0}) + d(x_{k_0}, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall m > k_0 \Rightarrow x_m \rightarrow x$$

2.- Sea $L: R^n \rightarrow R^m$ una función lineal donde ambos conjuntos están dotados de una norma.

a) (1 punto) Demuestre que $\exists A \in R \quad \|L(u) - L(v)\| \leq A\|u - v\| \quad \forall u, v \in R^n$. Determine A.

b) (1 punto) ¿Es L continua? Justifique.

c) (2 puntos) Muestre que $Ker(L) = \{x \in R^n / L(x) = 0\}$ es cerrado.

d) (2 puntos) Demuestre que L es inyectiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 / \|L(x)\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in R^n$

Solución

a) PDQ $\exists A \in \mathbb{R} \quad \|L(u) - L(v)\| \leq A \|u - v\| \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n.$

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ base canónica de \mathbb{R}^n

$$\begin{aligned} \left\| L\left(\sum_{i=1}^n u_i e_i\right) - L\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) \right\| &= \left\| L\left(\sum_{i=1}^n (u_i - v_i) e_i\right) \right\| = \left\| L\left(\sum_{i=1}^n (u_i - v_i) e_i\right) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \|L((u_i - v_i) e_i)\| \leq \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| \|L(e_i)\| \\ &\leq \max\{\|L(e_i)\|\} \sum_{i=1}^n |u_i - v_i| = \max\{\|L(e_i)\|\} \|u - v\| = A \|u - v\| \end{aligned}$$

b) L es continua.

En efecto, Sea $\|u - v\| < d$

$$\|L(u) - L(v)\| \leq A \|u - v\| < A d < e$$

Por lo tanto $\forall e > 0 \exists d = \frac{e}{A} \quad \|u - v\| < d \Rightarrow \|L(u) - L(v)\| \leq e$

c) En efecto. Sea $x_k \in \text{Ker}(L)$ una sucesión en \mathbb{R}^n talque $x_k \rightarrow x$

PDQ $x \in \text{Ker}(L)$

$$\begin{aligned} 0 \leq \|L(x_k) - L(x)\| &\leq A \|x_k - x\| \quad / \lim_{k \rightarrow \infty} \\ \Rightarrow \|L(x_k) - L(x)\| &= 0 \quad \text{pero} \quad L(x_k) = 0 \Rightarrow \|L(x_k) - L(x)\| = 0 \Rightarrow L(x) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(L) \end{aligned}$$

d) PDQ L es inyectiva $\Leftrightarrow \exists m > 0 \quad \|L(x)\| \geq m \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Probemos $\exists m > 0 \quad \|L(x)\| \geq m \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow L$ es inyectiva

Dem. Supongamos que $\exists m > 0 \quad \|L(x)\| \geq m \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \wedge L(x) = L(y)$ PDQ $x = y$

En efecto

$$\|L(x - y)\| \geq m \|x - y\| \Rightarrow \|L(x) - L(y)\| \geq m \|x - y\| \Rightarrow 0 \geq m \|x - y\| \Rightarrow \|x - y\| = 0 \Rightarrow x = y$$

Probemos L es inyectiva $\Rightarrow \exists m > 0 \quad \|L(x)\| \geq m \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Dem. Si L es inyectiva $\Rightarrow \text{Ker}(L) = 0$

$$\text{Si } x \neq 0 \Rightarrow \|x\| \neq 0 \wedge \|L(x)\| \neq 0 \quad \text{Sea } m = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \wedge \|L(x)\| = 0 \Rightarrow \forall m > 0 \quad \|L(x)\| \geq m \|x\|$$

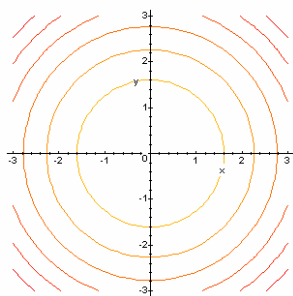
$$\text{luego } \Rightarrow \exists m = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} > 0 \quad / \quad \|L(x)\| \geq m \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

3.-

a) (2 ptos.) Dibuje las siguientes superficies de nivel por separado. Indique los puntos principales de intersección con los ejes.

i) $8 - z = 2x^2 + 2y^2$

Solución



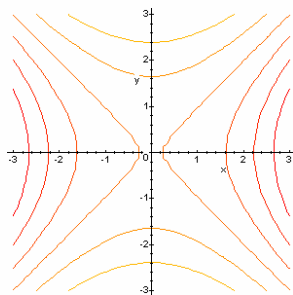
$$x^2 + y^2 = \frac{8 - z}{2} \quad r = \sqrt{\frac{8 - z}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{Rec}(f) = (-\infty, 8]$$

Las curvas de nivel son circunferencias de radio $r = \sqrt{\frac{8 - z}{2}}$

ii) $x^2 - y^2 + z^2 = 16$

Solución



$$x^2 - y^2 = 16 - z^2$$

Si $|z| = 4$, las curvas de nivel son las rectas $y = \pm x$

Si $|z| < 4$, las curvas de nivel son las hipérbolas $x^2 - y^2 = 16 - z^2$

Si $|z| > 4$, las curvas de nivel son las hipérbolas $y^2 - x^2 = z^2 - 16$

b) (4 puntos) Estudie la continuidad de las siguientes funciones en el origen. Si no es continua ¿es posible reparar la discontinuidad?

i) $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{z^2 + x^2 y^2} & \text{si } xy \neq 0 \vee z \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \wedge z = 0 \end{cases}$

Solución

$f(x, y, z)$ tiene una discontinuidad no reparable en el origen.

Consideremos la trayectoria $z = x^2 \wedge y = 1x \quad 1 \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ix^4}{x^4 + I^2 x^4} = \frac{I}{1 + I^2}$$

$$\text{ii) } g(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución

g es continua en el origen.

$$\left| \frac{y(x^4 + 4x^2 y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \left| \frac{y(2x^4 + 4x^2 y^2 + 2y^4)}{(x^2 + y^2)^2} \right| < |2y| < 2\|x\|_\infty < 2d = e$$

$$\text{iii) } h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + 3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Solución

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y) = 3$ Por lo tanto h tiene una discontinuidad reparable en el origen.

En efecto

$$\left| \frac{x^4 + 3(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} - 3 \right| = \left| \frac{x^4}{x^2 + y^2} \right| < |x|^2 < \|x\|_\infty^2 < d^2 = e$$