MA2001-3 Cálculo en Varias Variables 2015.
Profesor: Marcelo Leseigneur
Auxiliares: Esteban Quiroz - Valentín Retamal
Obed Ulloa - Donato Vásquez
Fecha: 11 de mayo de 2015

Auxiliar 8

P1 i) Sean $f : E \longrightarrow F$ diferenciable y $w : F \longrightarrow G$ lineal y continua. Muestre, sin usar la Regla de la Cadena, que $w \circ f$ es también diferenciable y encuentre explícitamente su diferencial.

ii) Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = x^t Ax + b^t x + c$$

Encuentre ∇f.

P2 Calcule el gradiente o jacobiano, según corresponda, justificando su existencia.

i) $H(x, y, z) = f((f(x, y, z), g(x, z)))$, donde

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

son diferenciables en todo el dominio.

ii) $\pi(x, y) = f(x + y, g(x, y), h(y, x))$, evaluado en $(0, 1)$, donde

$$f(x, y, z) = (x \sin z, y \cos z)$$
$$g(x, y) = y^2 \cos(x)$$
$$h(x, y) = -y \ln(\cos x)$$

P3 El objetivo es resolver la EDP dada por

$$(\star) \quad a\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + b\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + cu(x, y) = f(x, y)$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes y f es una función continua.

i) Suponiendo $a = 0$, encuentre una solución a $(\star)$.

ii) Defina $v(\xi, y) = u(x, y)$, con $\xi = bx - ay$, y reemplace en $(\star)$.

iii) Encuentre la solución a $(\star)$.

Propuesto Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\theta : U \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tales que $(\forall\, x \in U)\ \ f(x, \theta(x)) = 0$. Demuestre que

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \theta(x)) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \theta(x))\dfrac{d\theta}{dx}(x) = 0$
- Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \theta(x)) \neq 0$, entonces $\dfrac{d\theta}{dx}(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \theta(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \theta(x))}$

Considere la curva dada por la ecuación

$$\sin(xy) + e^{(x+1)y} + 2^x = 2$$

Utilizando la parte anterior, encuentre la recta tangente a la curva en el punto $(0, 0)$.