Fiche de cours 2 : Quelques rappels de topologie sur un espace métrique

1 Ouvert, fermé, compact

1.1 Espace métriques

Définition. (distance, espace métrique). Soit E un ensemble. On dit qu'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur E si d vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) Propriété de séparation : $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

(ii) Propriété de symétrie : $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$.

(iii) Inégalité triangulaire : $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

On appelle espace métrique tout couple (E, d) constitué d'un ensemble E et d'une distance d sur E.

Remarque. $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces métriques, munis de la distance $d(x, y) = |x - y|$. Tout ce qui suit s'applique donc également au cas de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans toute la suite on suppose que (E, d) est un espace métrique.

1.2 Ouverts, fermés

Définition. Pour tout $x_0 \in E$ et tout $r > 0$, on appelle `boule ouverte de centre` x_0 `et de rayon` r l'ensemble

$$B(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) < r\}.$$

On appelle `boule fermée de centre` x_0 `et de rayon` r l'ensemble

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in E,\ d(x, x_0) \leq r\}.$$

Définition.
1. Une partie U de E est `un ouvert de` E si pour tout $x \in U$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset U$.
2. Une partie F de E est `un fermé de` E si et seulement si son complémentaire F^c dans E est ouvert.

Proposition. *Soit E un espace métrique et F une partie de E. Alors F est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de F qui converge vers un élément $x \in E$, alors $x \in F$.*

Remarque.
1. On omet souvent dans la pratique de préciser l'espace relatif la notion de fermé ou d'ouvert (par exemple on dira "U est un ouvert" au lieu de "U est un ouvert de $\mathbb{R}$").
2. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ouverts et les intervalles fermés sont des fermés. Plus généralement, dans tout espace métrique E, toute boule ouverte est une partie ouverte et toute boule fermée est une partie fermée.

Proposition. *Soit I un ensemble.*
Soient $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés.

1. *$\bigcup_{i\in I} U_i$ est un ouvert.*
2. ***Si** I **est fini** alors $\bigcap_{i\in I} U_i$ est un ouvert.*
3. *$\bigcap_{i\in I} F_i$ est un fermé.*

4. ***Si I est fini*** *alors $\bigcup_{i\in I} F_i$ est un fermé.*

Remarque. Par contre si I n'est pas fini $\bigcap_{i\in I} U_i$ n'est pas nécessairement ouverte et $\bigcup_{i\in I} F_i$ n'est pas nécessairement fermée comme en témoignent les deux exemples suivants :

$$\bigcap_{n>0} \left]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right[= \{0\} \text{ non ouvert,} \qquad \bigcup_{n>0} \left[0, 1-\frac{1}{n}\right] = [0,1[\text{ non fermé.}$$

1.3 Adhérence d'un ensemble

Définition. Soit P une partie de E et $x \in E$. On dit que x est `adhérent` P si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad B(x,\varepsilon) \cap P \neq \emptyset.$$

On appelle l'`adhérence` de P dans E et on note $\overline{P}$ l'ensemble des points adhérents P.

Proposition. *Soit P une partie de E et $x \in E$. Alors x est dans $\overline{P}$ si et seulement si x est la limite d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de P.*

Proposition. *Une partie P de E est fermée dans E si et seulement si $\overline{P} = P$.*

Proposition. *Soit P une partie de E. Alors $\overline{P}$ est l'intersection de tous les fermés contenant P. C'est donc le plus petit fermé contenant P.*

1.4 Compacts

Définition. Soit K une partie d'un espace métrique E. On dit que K est compact si il vérifie la propriété :
Propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement de K par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini.
Ceci se traduit de la manire suivante : si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ alors il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que $K \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Proposition. *Soit K une partie d'un espace métrique E. K est compact si et seulement si il vérifie la propriété suivante :*
Propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite d'éléments de K admet une sous-suite convergente dans K.

Proposition. *Soit K une partie de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$. Alors K est `compact` si et seulement si K est une partie fermée et bornée.*

Exemple. *Les segments de $\mathbb{R}$ sont compacts. Plus généralement, toute boule fermée de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est compacte.*

Proposition.
1. *Une union finie de compacts est compacte.*
2. *Une intersection de compacts est compacte.*

2 Fonctions

2.1 Cas général

Soient (E,d) et (F,d') deux espaces métriques.

Définition. Soit P une partie de E et $f : P \to F$ une fonction.

1. La fonction f est `continue en` $x_0 \in P$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta = \delta(x_0,\varepsilon) > 0, \quad \forall x \in P, \quad d(x,x_0) \leq \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x) - f(x_0)) < \varepsilon.$$

Il est important de noter que ici δ dépend de x_0.

2. La fonction f est dite `continue sur` P si elle est continue en tout point de P.

Proposition. *Soit $f : P \to F$ une fonction. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en a.*
2. *Pour toute suite $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de P ayant pour limite a, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a).$$

Proposition. *Soit K un compact d'un espace métrique E. Alors toute fonction $f : K \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Proposition. *Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors :*

1. *l'image réciproque par f d'un ouvert de F est un ouvert de E ;*
2. *l'image réciproque par f d'un fermé de F est un fermé de E ;*
3. *l'image directe par f d'un compact de E est un compact de F.*

Définition. $f : P \to F$ est `uniformément continue sur` P si elle vérifie la propriété $(\mathcal{UC})$:

$$(\mathcal{UC}) \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \quad \forall(x,y) \in P^2, \quad d(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Il est important de noter que ici δ ne dépend que de ε.

Théorme (Heine)**.** *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Exemple. *La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$, tout comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;1[$.*

Définition. 1. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit que $f : P \to F$ est k-lipschitzienne sur P si

$$\forall(x_1,x_2) \in P^2, \quad d'(f(x_1), f(x_2)) \leq k\, d(x_1,x_2).$$

2. On dit que f est lipschitzienne sur P s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f soit k-lipschitzienne sur P.

Proposition. *Si f est lipschitzienne, alors f est uniformément continue.*

Proposition. ***Théorme des valeurs intermédiaires*** *Soient $a < b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue* ***valeurs dans*** *$\mathbb{R}$. Supposons que $f(a) \leq f(b)$. Alors :*

$$\forall\gamma \in [f(a); f(b)], \; \exists c \in [a,b], \; f(c) = \gamma.$$

3 Suites

Définition. Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.
La suite $(x_n)_n$ est une `suite de Cauchy` si

$$\forall\varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall p,q \geq n_0, \quad d(x_p,x_q) \leq \varepsilon.$$

Proposition. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Réciproque fondamentale : <u>dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$</u>, toute suite de Cauchy est convergente.

Définition. Soit (E,d) un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite d'éléments de E.
La suite $(x_n)_n$ a une `valeur d'adhérence` x si toute boule ouverte $B(x,\varepsilon)$ contient une infinité de valeurs de la suite (x_n). Ceci s'écrit aussi :

$$\forall\varepsilon > 0, \; \forall n_0 \in \mathbb{N}, \; \exists n \geq n_0, \quad d(x_n,x) < \varepsilon.$$

Ceci est équivalent dire qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ qui converge vers x (φ est ici une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$). On dit également qu'on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_n$ (ou encore qu'il existe une suite extraite de $(x_n)_n$) qui converge vers x.

Proposition. 1. *Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence, qui est sa limite.*

2. *Dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, la réciproque est vraie si la suite est bornée : une suite bornée ayant une seule valeur d'adhérence est convergente.*

Remarque. Il est utile dans la pratique de vérifier qu'une suite concrte n'est pas convergente en exhibant deux valeurs d'adhérences.

4 Ordre sur $\mathbb{R}$

Théorme. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.*

1. *Si A a un majorant, alors A a un plus petit majorant, qu'on appelle* `borne supérieure` *de A.*
2. *Si A a un minorant, alors A a un plus grand minorant, qu'on appelle* `borne inférieure` *de A.*

Proposition. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m et M deux réels.*

1. *M est la borne supérieure de A si et seulement si M vérifie les deux assertions suivantes :*
   (a) $\forall a \in A,\ a \leq M,$
   (b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \cap]M - \varepsilon, M].$
2. *m est la borne inférieure de A si et seulement si m vérifie les deux assertions suivantes :*
   (a) $\forall a \in A,\ a \geq m$
   (b) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \cap [m, m + \varepsilon[.$