THÉORÈME DE HEINE

Toute fonction numérique continue sur un segment I est uniformément continue sur ce segment I.

On rappelle qu'un segment est un intervalle fermé borné.

Démonstration :

Soit f une fonction continue sur I.

Supposons f non uniformément continue sur I.

Alors : $\exists\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall\eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists(x ; y) \in I^2 \text{ tel que : } (|x - y| < \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon)$$

En particulier, en choisissant $\eta = \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists(x_n ; y_n) \in I^2 \text{ tel que : } (|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon) \qquad (1)$$

Comme ***I* est borné**, les suites (x_n) et (y_n) ainsi définies le sont également.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc en extraire des sous-suites qui convergent.

Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une application strictement croissante telle que la suite $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ converge.

Notons ℓ sa limite. (On a nécessairement $\ell \in I$ puisque ***I* est fermé**).

Fixons $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$. On a donc :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_1 \Rightarrow |x_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2})$$

Mais, d'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a d'après (1) :

$$|x_{\sigma(n)} - y_{\sigma(n)}| < \frac{1}{\sigma(n)}$$

Comme $\dfrac{1}{\sigma(n)}$ tend vers 0, on a :

$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N_2 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sigma(n)}\right| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2})$$

Pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a alors :

$$|y_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant |y_{\sigma(n)} - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \leqslant \varepsilon'$$

Ceci prouve que la suite $\left(y_{\sigma(n)}\right)$ converge également vers ℓ.

Or, f étant continue sur I, on peut affirmer que les suites $\left(f\left(x_{\sigma(n)}\right)\right)$ et $\left(f\left(y_{\sigma(n)}\right)\right)$ convergent vers $f(\ell)$. Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant N \Rightarrow \left|f(y_{\sigma(n)}) - f(x_{\sigma(n)})\right| < \varepsilon)$$

Ce qui contredit (1).

Conclusion : f est uniformément continue sur le segment I.