FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Departamento de Ingeniería Matemática
MA1002-2 / Cálculo Diferencial e Integral
Semestre otoño 2015

Auxiliar extra examen II - Última :'(

Profesor: Raúl Uribe S.

Auxiliar: Patricio Santis T.

20 de agosto de 2015

Problema 1

a) Calcular las asíntotas horizontales de $f(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t^2} dt$

b) Utilizar una serie de potencias de la forma $\sum_0^{\infty} c_n x^n$ para resolver la ecuación diferencial $xy'' + y' = y$, sujeta a las condiciones $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

c) Considere la serie geométrica $f(x) = \sum_{n \geq 0} x^n$, con $|x| < 1$. Calcule $\int_0^{\frac{1}{2}} f(t^2) dt$ y demuestre que:

$$\ln(3) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4^n(2n+1)}$$

Problema 2

Calcular el triedro de Frenet y la masa de una espira del alambre helicoidal dado por $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos(t), a\sin(t), \frac{H}{2\pi}t)$ si la densidad en cada punto es proporcional a su distancia al origen al cuadrado.

Problema 3

a) Obtenga un desarrollo en serie de potencias para la función $f(x) = \ln(1+x^2)$. **Ind.:** Obtener una serie para $f'(x)$ y luego integrar.

b) Obtenga un desarrollo en serie para $f(x) = \sin(x)$, mediante un desarrollo de Taylor de orden ∞, en torno a $x_0 = 0$. Repetir para $f(x) = e^x$.

c) Estudiar la convergencia de $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$

Problema 4

Sea $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$

a) Demuestre que existe un único cero entre $[-2, -1]$.

b) Determinar continuidad, derivabilidad, crecimiento, mínimos y máximos, puntos de inflexión, concavidad y convexidad, asíntotas.

c) Analizar la convergencia de $\displaystyle\int_1^\infty \frac{f'''(x)}{x\sqrt{x}} dx$ y $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'''(x)}{x\sqrt{x}} dx$.

Problema 5

Sea f la función definida en $(-1, \infty)$ por $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^3}$. Para los volúmenes y áreas siguientes, se pide determinar si son finitos y en tal caso calcularlos.

a) Área de $R = \{(x, y) : 0 \leq x, 0 \leq y \leq f(x)\}$

b) Área de $Q = \{(x, y) : -1 < x \leq 0, f(x) \leq y \leq 0\}$

c) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a), en torno al eje OX.

d) Volumen del sólido obtenido al rotar la región R de la parte a), en torno al eje OY.

Problema 6

a) Encontrar una serie de potencias para $f(x) = \dfrac{3x}{1 - x - 2x^2}$

b) Considere la función $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\int_0^x \frac{e^{xt} - 1}{t} dt$$

Demuestre que f está bien definida y que es derivable en $[0, \infty)$. Calcule $f'(x)$ y verifique que f es estrictamente creciente en $[0, \infty)$. **Indicación**: Use cambio de variable.

★ **Propuestos**

$\boxed{\text{P1}}$ Para (a_n) con $a_n \geq 0$ y $a_1 > 0$ se define $b_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$. Demuestre que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} b_n$ diverge.

Ind.: Probar que $\sum_{j=1}^{n} b_j \geq a_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$.

Con mis maestros he aprendido mucho; con mis colegas, más; con mis alumnos todavía más.

Colorin colorado las frases se han acabado u.u, su auxiliar Patricio Santis se despide y les desea éxito en su vida. Sean felices :)