**IN4402-2:** Aplicaciones de Probabilidades y Estadística en Gestión
**Profesora:** Paola Bordon
**Auxiliar:** Andrés Fernández

# Auxiliar 5 - Semestre Otoño 2015

14 de Abril, 2015

Canción de hoy: Estudiar y trabajar, de Ases Falsos

## Problema 1: Estimadores

Sea $X_{i\,i=1}^{n}$ una m.a.s con media $\mu$ y varianza $\sigma^2$. Se propone como estimador de $\sigma^2$:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

1. Pruebe que $S^2$ es un estimador insesgado de $\sigma^2$.
2. Pruebe que $S^2$ es un estimador consistente de $\sigma^2$.
   **Hint 1:** $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$
   **Hint 2:** $\mathbb{E}(\chi^2_n) = n, Var(\chi^2_n) = 2n$

## Problema 2: MCO y Gauss Markov

Considere el modelo lineal en forma matricial basado en una muestra de $n$ observaciones:

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

Donde $\beta$ es un vector de $kx1$ y se cumple que $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0, Var(\varepsilon) = \sigma^2_n$

1. ¿Cuál es la dimensión de $Y$, $X$ y $\varepsilon$?
2. Pruebe las siguientes propiedades del modelo propuesto:
   I. $X'\varepsilon = 0$
   II. $Y'Y = \hat{Y}'\hat{Y} + \hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$
   III. $\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = Y'Y - \beta'_{MCO}X'Y$

## Problema 3: Modelos, interpretación y tests

Se muestran en la tabla los resultados de una regresión que busca explicar el peso de recién nacidos de acuerdo a datos familiares obtenidos en una encuesta (se utilizó la base bwght.dta):

$$peso = \beta_0 + \beta_1 cigs + \beta_2 ingfam + \beta_3 educma + \beta_4 hombre + u$$

Donde: *peso* es el peso de los niños al nace, *cigs* es la cantidad de cigarros que la madres fumó durante el embarazo, *ingfam* es el ingreso familiar promedio durante el embarazo, *educma* son los años de escolaridad de la madre, y *hombre* es una variable dummy para indicar si el recién nacido es hombre o no.

```
. reg peso cigs ingfam educma hombre
```

| Source | SS | df | MS |
|---|---|---|---|
| Model | 20420.6763 | 4 | 5105.16907 |
| Residual | 554054.065 | 1382 | 400.907428 |
| Total | 574474.741 | 1386 | 414.48394 |

| | | |
|---|---|---|
| Number of obs | = | 1387 |
| F( 4, 1382) | = | 12.73 |
| Prob > F | = | 0.0000 |
| R-squared | = | 0.0355 |
| Adj R-squared | = | 0.0328 |
| Root MSE | = | 20.023 |

| peso | Coef. | Std. Err. | t | P>\|t\| | [95% Conf. | Interval] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| cigs | -.4619272 | .0925055 | -4.99 | 0.000 | -.6433936 | -.2804608 |
| ingfam | .096687 | .0324252 | 2.98 | 0.003 | .0330791 | .1602949 |
| educma | -.0046749 | .2573963 | -0.02 | 0.986 | -.5096046 | .5002548 |
| hombre | 3.100153 | 1.077924 | 2.88 | 0.004 | .9856102 | 5.214697 |
| _cons | 115.3093 | 3.1742 | 36.33 | 0.000 | 109.0825 | 121.5361 |

Figura 1: **Regresión 1**

1. Discuta la validez del modelo, la significancia de sus coeficientes, las relevancias estadíticas y analice los signos de cada coeficiente, entregando un análisis económico de lo que puede estar mostrando el modelo.
2. ¿Cuál es el efecto marginal en el peso del recién nacido de un cigarro fumado durante el embarazo? ¿Cuál es el efecto en el peso si es que el recién nacido es hombre?
3. ¿Cómo testearía la hipótesis de que todos los coeficientes de la regresión excepto el intercepto son iguales a 0?
4. Elabore un test para la hipótesis nula: ”No existe diferencia real en el peso de un bebé si es que este es hombre o mujer”.
5. Discuta según sus conocimientos y argumente si existe la posible existencia de multicolinealidad y heterocedasticidad.

## Problema 4: Multicolinealidad y FWL

Considerando el modelo matricial:

$$y = \begin{bmatrix} X_A & X_B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{bmatrix} + \varepsilon$$

1. Regresionar $y$ sobre $X_B$ y calcular residuos
2. Premultiplicar por la matriz $M_{X_B}$ obtenida en el punto anterior
3. Aplicar MCO en modelo premultiplicado para llegar al estimador FWL

## Problema 5: Heterocedasticidad Y MCG

Considere el modelo con sólo una variable explicativa:

$$Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$$

Donde la variable $X_i$ es siempre positiva. Se definen los siguientes estimadores alternativos del parámetro unidimensional $\beta$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i}$$
$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^n X_i Y_i}{\sum_{i=1}^n X_i^2}$$

Suponga que existe una perturbación $\varepsilon_i$ posee media 0 y varianza $\sigma^2 \lambda_i$

1. Determine cual es el estimador lineal insesgado óptimo de $\beta$. Calcule su esperanza y su varianza.
2. Determine si es posible encontrar condiciones sobre $\lambda_i$ de manera que el estimador óptimo obtenido en (1) sea $\hat{\beta}_1$ o $\hat{\beta}_2$.