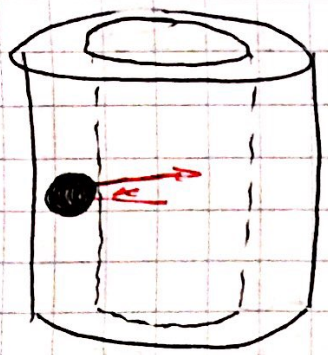


Problema 1, Aux 2

Sergio Lotre M.

En un problema de dinámica, el primer paso y quizás el más importante es realizar un correcto diagrama de cuerpo libre. Por otro lado se deben escoger las coordenadas para describir el movimiento de la partícula (o cuerpo), en este caso es lógico que se deben utilizar cilíndricas.

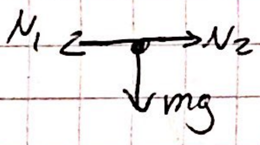
Así: $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k} = R_0\hat{\rho} + z\hat{k}$, ya que $\rho = R_0 = cte$.

$\vec{v} = R_0\dot{\phi}\hat{\phi} + \dot{z}\hat{k}$

$\vec{a} = R_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k}$

Ahora, para el DCL, consideremos que la partícula está en el lugar señalado del dibujo. Se tendrá que hay 3 fuerzas actuando en la partícula: el peso, y una normal por cada cilindro:

DCL



$\Rightarrow \vec{F} = (N_2 - N_1)\hat{\rho} - mg\hat{k}$

Luego, por Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

$\Rightarrow (N_2 - N_1)\hat{\rho} - mg\hat{k} = m(R_0\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho} + \ddot{z}\hat{k})$

Separándolo por coordenada, se tiene:

$\hat{\rho}\rfloor\ N_2 - N_1 = -mR_0\dot{\phi}^2$ $\quad \hat{\phi}\rfloor\ mR_0\ddot{\phi} = 0$ $\quad \hat{k}\rfloor\ -mg = m\ddot{z}$

Luego, de $\hat{\phi}$ se tiene: $mR_0\ddot{\phi} = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = cte = A \ / \int dt$

$\Rightarrow \phi = At + B$

Pero por condiciones iniciales se tiene que

$\vec{v}(0) = V_0 \sin\alpha\,\hat{k} + V_0\cos\alpha\,\hat{\phi} \Rightarrow \dot{z}(0) = V_0\sin\alpha$

$R_0\dot{\phi}(0) = V_0\cos\alpha$

$\Rightarrow \dot{\phi}(0) = \frac{V_0\cos\alpha}{R_0} \Rightarrow A = \frac{V_0\cos\alpha}{R_0}$

Del mismo modo, podemos elegir arbitrariamente que $\phi(0)=0$

$\Rightarrow B=0$

$$\Rightarrow \boxed{\phi(t) = \frac{V_0 \cos\alpha\, t}{R_0}}$$

Ahora, de $\vec{k}$ se tiene que: $\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + C$

$$\Rightarrow z = -g\frac{t^2}{2} + Ct + D$$

Por condiciones iniciales $\dot{z}(0) = V_0 \sin\alpha \Rightarrow C = V_0 \sin\alpha$

y también $z(0) = h \Rightarrow D = h$

$$\Rightarrow z = h + V_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$$ igual que la caída libre!!

Estamos buscando t^* tal que: $z(t^*) = 0$

$$\Rightarrow t^2 - \frac{2V_0 \sin\alpha\, t}{g} - \frac{2h}{g} = 0 \Rightarrow t^* = \frac{V_0 \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + \frac{2h}{g}}$$

Luego la cantidad de vueltas realizadas por la partícula será

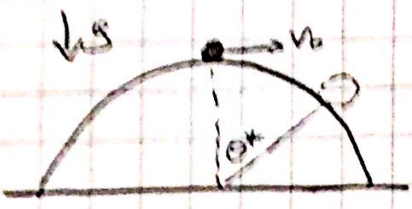
$$N = \frac{\phi(t^*)}{2\pi}$$, dado a que $\phi(t^*)$ nos entrega el ángulo total barrido en radianes, y cada vuelta son 2π [rad].

$$\Rightarrow N = \frac{V_0 \cos\alpha}{R_0} \cdot \left(\underbrace{\frac{V_0 \sin\alpha}{g}}_{1} \pm \sqrt{\left(\underbrace{\frac{V_0 \sin\alpha}{g}}_{2}\right)^2 + \frac{2h}{g}} \right) \cdot \frac{1}{2\pi}$$

Notemos que N arroja dos resultados, pero debido a que $(1)=(2)$, uno de los resultados es <u>Negativo</u>, y por lo tanto se descarta.

!!

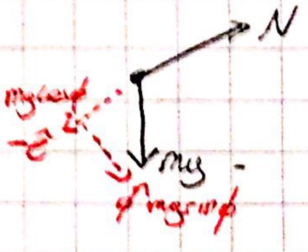
Problema 2, Aux 2



Al igual que el problema anterior debemos escoger las coordenadas para describir el movimiento y realizar el DCL. En este caso usamos polares.

$\vec{r} = R\hat{\rho}$; $\vec{v} = R\dot{\phi}\hat{\phi}$, $\vec{a} = R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho}$

DCL para un ángulo ϕ cualquiera:



Y por Newton: $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow N\hat{\rho} - mg\cos\phi\,\hat{\rho} + mg\sin\phi\,\hat{\phi} = m(R\ddot{\phi}\hat{\phi} - R\dot{\phi}^2\hat{\rho})$$

$\Rightarrow \hat{\rho}\,)$ $\quad (N - mg\cos\phi) = -mR\dot{\phi}^2$

$\hat{\phi}\,)$ $\quad mg\sin\phi = mR\ddot{\phi} \Rightarrow \ddot{\phi} = \frac{g}{R}\sin\phi$! Esta EDO la verán muchas veces en el curso!

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{R}\sin\phi \;/\cdot\dot{\phi} \Rightarrow \ddot{\phi}\dot{\phi} = \frac{g}{R}\sin\phi\,\dot{\phi} \;/\int dt$$

$\Rightarrow \frac{\dot{\phi}^2}{2} = -\frac{g}{R}\cos\phi + A$ Por condiciones iniciales $\dot{\phi}(0) = R v_0$, $\cos\phi(0) = 1$

$$\Rightarrow A = \frac{R^2 v_0^2}{2} + \frac{g}{R} \Rightarrow \dot{\phi}^2 = -\frac{2g}{R}\cos\phi + R^2 v_0^2 + \frac{2g}{R}$$

Ahora; para ver donde se despega la partícula, debemos imponer que la Normal se anule $\Rightarrow N = 0$

de $\hat{\rho} \Rightarrow \cancel{N} - mg\cos\phi = -mR\dot{\phi}^2 \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{g}{R}\cos\phi$

Reemplazando $\dot{\phi}^2 \Rightarrow -\frac{2g}{R}\cos\phi + R^2 v_0^2 + \frac{2g}{R} = \frac{g}{R}\cos\phi$

Y despejando: $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{R}{3g}\left(R^2 v_0^2 + \frac{2g}{R}\right)\right)$

Parte b) queda propuesta...