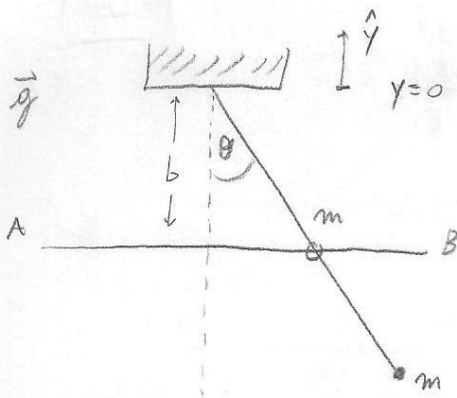


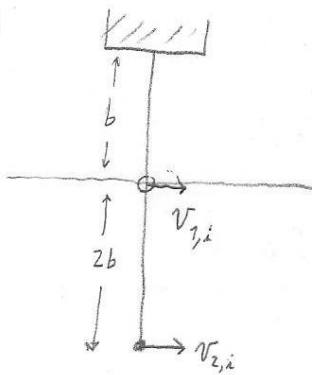
Punto P2, Examen



a) El sistema es conservativo $\Rightarrow$ la energía se conserva $E_i = E_f$

• Tomemos la posición inicial con la barra vertical y una velocidad angular inicial:

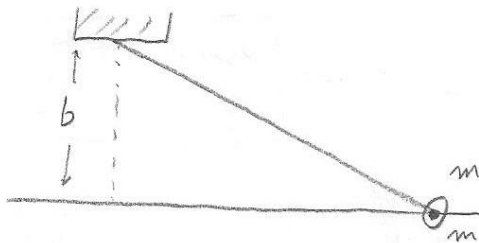
$$E = E_i :$$



$$\Rightarrow E_i = \overbrace{K_{1,i} + K_{2,i}}^{\text{cinética}} + \overbrace{V_{1,i} + V_{2,i}}^{\text{potencial}}$$

$$\Rightarrow = m \frac{(b \dot{\theta}_i)^2}{2} + m \frac{(3b \dot{\theta}_i)^2}{2} - mgb - 3mgb$$

$E = E_f$: La posición final es con el extremo de la barra en el eje $\overline{AB}$. Como queremos la velocidad angular mínima, basta con que llegue con velocidad angular nula a la energía final:



$$E_f = \overset{0}{K_f} + V_{1,f} + V_{2,f} = -mgb - mgb$$

• conservación de energía: $E_i = E_f$

$$\Rightarrow \dot{\theta}_i^2 \left(\frac{b^2}{2} + \frac{9b^2}{2} \right) - 4gb = -2gb \Rightarrow \dot{\theta}_i^2 \frac{10}{2} b^2 = 2gb$$

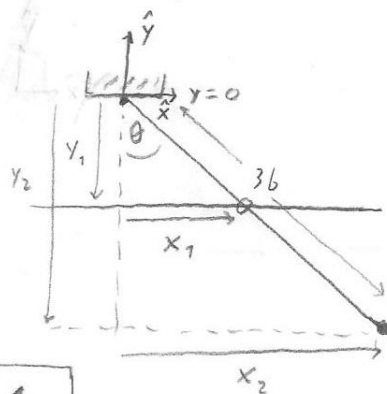
$$\Rightarrow \dot{\theta}_i^2 = \frac{2g}{5b} \Rightarrow$$

$$\boxed{\dot{\theta}_i = \sqrt{\frac{2g}{5b}}}$$

b) • Veamos cómo es la energía en un momento cualquiera:

• La posición de los péndulos en coordenadas:

$$\begin{aligned}\text{anillo: } \vec{r}_1 &= x_1 \hat{x} + y_1 \hat{y} \\ &= b \cos \theta \hat{x} - b \hat{y}\end{aligned}$$



$$\Rightarrow \vec{v}_1 = b \sec^2 \theta \dot{\theta} \hat{x} \Rightarrow \boxed{v_1^2 = b^2 \dot{\theta}^2 \sec^4 \theta}$$

$$\text{Péndulo: } \vec{r}_2 = x_2 \hat{x} + y_2 \hat{y} = 3b \sin \theta \hat{x} - 3b \cos \theta \hat{y}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = 3b \cos \theta \dot{\theta} \hat{x} + 3b \sin \theta \dot{\theta} \hat{y}$$

$$\Rightarrow v_2^2 = 9b^2 \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \Rightarrow \boxed{v_2^2 = 9b^2 \dot{\theta}^2}$$

$$\bullet \text{ Energía: } E = \frac{m}{2} v_1^2 + \frac{m}{2} v_2^2 + mg y_1 + mg y_2$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{m}{2} b^2 \dot{\theta}^2 (\sec^4 \theta + 9) - mg(b + 3b \cos \theta) = K + V}$$

$$\bullet \text{ Potencial } V(\theta) = -mg(b + 3b \cos \theta)$$

$$\bullet \text{ equilibrio en } \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = mg 3b \sin \theta = 0 \rightarrow$$

equilibrio en
 $\theta = 0$

$$\bullet \text{ Estabilidad: } \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = mg 3b \cos \theta \Big|_{\theta=0} = mg 3b > 0 \Rightarrow \text{estable } \cup$$

$$\bullet \text{ Aproximación oscilatoria: } \theta = 0 + \delta\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \delta\dot{\theta} \quad \cos \delta\theta = 1 - \frac{\delta\theta^2}{2}$$

$$\sec \delta\theta = \frac{1}{1 - \frac{\delta\theta^2}{2}} \approx 1 + \frac{\delta\theta^2}{2}$$

La energía queda: $E(\delta\theta) = K(\delta\theta, \dot{\delta\theta}) + V(0) + \delta\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}(0) + \frac{\delta\theta^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0)$

$$\Rightarrow E(\delta\theta) = \frac{m}{2} b^2 \dot{\delta\theta}^2 \left(10 + \frac{\delta\theta^2}{2} \right) - 4mgb + \frac{\delta\theta^2}{2} mg 3b$$

Por lo que en forma: $\ddot{\delta\theta} + \omega^2 \delta\theta = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{\dot{\delta\theta}^2}{2} + \omega^2 \frac{\delta\theta^2}{2}}_{\mathcal{E}} + \text{cte} \right) = 0$

$$E = 10mb^2 \frac{\dot{\delta\theta}^2}{2} + mg 3b \frac{\delta\theta^2}{2} - 4mgb$$

$$\mathcal{E} = \frac{E}{10mb^2} = \frac{\dot{\delta\theta}^2}{2} + \underbrace{\frac{3g}{10b}}_{\omega^2} \frac{\delta\theta^2}{2} - \frac{2g}{5b} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{3g}{10b}}}$$