Mecánica: Auxiliar 25

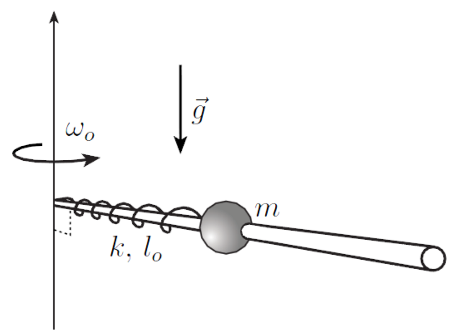
Profesor: Andrés Escala, Profesores Auxiliares: Patricio Venegas A. y Alejandro Escobar N.

Lunes, 10 de Agosto de 2015

Problema 1: Oscilaciones amortiguadas

Una Esfera de masa m tiene un agujero que le permite deslizar alo largo de una barra dispuesta horizontalmente que rota con velocidad Ω_0 constante. La esfera está unida al eje de rotación mediante un resorte (k, l_0). La barra está cubierta de un material que genera roce viscoso en la esfera de la forma $\vec{F_v} = -c\dot{\rho}\hat{\rho}$.

Determine la posición en función del tiempo de la esfera para todos los valores posibles de c. Asuma $\frac{k}{m} > \omega_0^2$, y que la masa comienza desde el reposo relativo a la barra con el resorte no deformado.



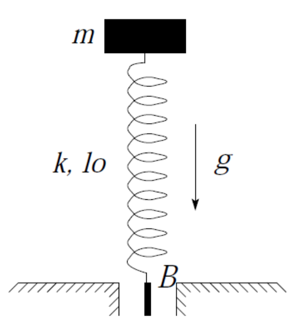
Problema 2: Oscilaciones forzadas

Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte (k, l_0), bajo la acción de la gravedad. El punto B se encuentra al nivel del suelo.

(a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa.

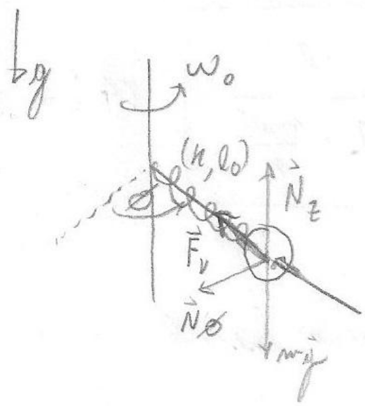
(b) En cierto instante el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r_B}(t) = A_0\ sin(\omega t)\hat{j}$. Encuentre la ecuación de movimiento de la masa.

(c) Resuelva la ecuación de movimiento. Asuma que la masa parte del reposo en la posición calculada en (a).



Pauta Aux 25

P1



· Roce viscoso:

$$\vec F_v = -c\dot\rho\hat\rho$$

· Usamos coord. cilíndricas $(\hat\rho, \hat\phi, \hat z)$:

$\hat\rho \,|\; m(\ddot\rho - \rho\omega_0^2) = -k(\rho - l_0) - c\dot\rho$

$\hat\phi \,|\; 2m\dot\rho\omega_0 = N_\phi$

$\hat z \,|\; 0 = N_z - mg$

· Usando la ec. en $\hat\rho$:

$$\Rightarrow \boxed{\ddot\rho + \frac{c}{m}\dot\rho + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)\rho = \frac{k l_0}{m}}$$

Ec. de movimiento para la posición $\rho(t)$ (1)

· Separamos en solución homogénea y particular: $\rho(t) = \rho_H(t) + \rho_P(t)$

· Ansatz para homogénea: $\rho_H(t) = e^{\lambda t}$ en $(1) = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\left[\lambda^2 + \frac{c}{m}\lambda + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)\right]} e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{-\frac{c}{m} \pm \sqrt{\frac{c^2}{m^2} - 4\left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)}}{2} = \frac{-c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)} \quad (2)$$

· Ansatz para particular: $\rho_P(t) = D$ (con D constante) en (1)

$$\Rightarrow 0 + 0 + \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)D = \frac{k l_0}{m} \Rightarrow D = \frac{\frac{k}{m} l_0}{\frac{k}{m} - \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = l_0 \frac{1}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}} \quad (3)$$

se cumple $D > 0$ porque $\frac{k}{m} > \omega_0^2$

· juntando todo llegamos a la solución: (usando $\Delta = \left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right)$)

$$\boxed{\rho(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A e^{\sqrt{\Delta} t} + B e^{-\sqrt{\Delta} t}\right) + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}} \quad (4)$$

con A y B constantes

· Para calcular A y B usamos las condiciones iniciales:

↳ Desde el reposo (relativo) $\Rightarrow \dot{\rho}(0) = 0$

↳ Con el resorte no deformado $\Rightarrow \rho(0) = l_0$

(5)

· Usando (5) en (4):

$$\Rightarrow \rho(0) = A + B + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}} = l_0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}(0) = A\left(\frac{-c}{2m} + \sqrt{\Delta}\right) + B\left(\frac{-c}{2m} - \sqrt{\Delta}\right) = 0 \Rightarrow B = A \, \frac{\frac{-c}{2m} + \sqrt{\Delta}}{\frac{c}{2m} + \sqrt{\Delta}}$$

$$(6) \Leftrightarrow A\left(1 + \frac{\frac{-c}{2m} + \sqrt{\Delta}}{\frac{c}{2m} + \sqrt{\Delta}}\right) = l_0\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}\right)$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{\cancel{\frac{c}{2m}} + \sqrt{\Delta} - \cancel{\frac{c}{2m}} + \sqrt{\Delta}}{\frac{c}{2m} + \sqrt{\Delta}}\right) = l_0\left(\frac{\cancel{1} - \frac{m\omega_0^2}{k} - \cancel{1}}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}\right)$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{\frac{c}{2m} + \sqrt{\Delta}}{2\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{-\frac{m\omega_0^2}{k}}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}\right) l_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{-l_0}{2} \, \frac{\frac{c}{2m\sqrt{\Delta}} + 1}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1}} \quad (7)$$

· con la sol en (6) queda: $B = \frac{-l_0}{2} \frac{1}{\frac{k}{m\omega_0^2}-1} \frac{\cancel{\frac{c}{2m}+\sqrt{\Delta}}}{\sqrt{\Delta}} \frac{\frac{-c}{2m}+\sqrt{\Delta}}{\cancel{\frac{c}{2m}+\sqrt{\Delta}}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{l_0}{2} \frac{\frac{c}{2m\sqrt{\Delta}} - 1}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1}} \quad (8)$$

· usando (7) y (8) en (4):

$$\rho(t) = -\frac{l_0}{2} \frac{e^{-\frac{c}{2m}t}}{\frac{k}{m\omega_0^2}-1} \Bigg[\underbrace{\left(\frac{c}{2m\sqrt{\Delta}}+1\right) e^{\sqrt{\Delta}t} - \left(\frac{c}{2m\sqrt{\Delta}}-1\right) e^{-\sqrt{\Delta}t}}_{\frac{c}{2m\sqrt{\Delta}}\left(e^{\sqrt{\Delta}t} - e^{-\sqrt{\Delta}t}\right) + e^{\sqrt{\Delta}t} + e^{-\sqrt{\Delta}t}} \Bigg] + \frac{l_0}{1-\frac{m\omega_0^2}{k}} \quad (9)$$

· caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 > \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$

$$(9) \Rightarrow \boxed{\rho(t) = \frac{-l_0 e^{-\frac{c}{m2}t}}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1} \left[\frac{c}{2m\sqrt{\Delta}} \sinh(\sqrt{\Delta}t) + \cosh(\sqrt{\Delta}t) \right] + \frac{l_0}{1-\frac{m\omega_0^2}{k}}}$$

· caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 < \left(\frac{k}{m} - \omega_0^2\right) \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{-\Delta} \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \quad \rho(t) = \frac{-l_0 e^{-\frac{c}{2m}t}}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1} \left[\frac{c}{2m\sqrt{-\Delta}} \left(\frac{e^{i\sqrt{-\Delta}t} - e^{-i\sqrt{-\Delta}t}}{2i} \right) + \left(\frac{e^{i\sqrt{-\Delta}t} + e^{-i\sqrt{-\Delta}t}}{2} \right) \right] + \frac{l_0}{1-\frac{m\omega_0^2}{k}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(t) = \frac{-l_0 e^{-\frac{c}{2m}t}}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1} \left[\frac{c}{2m\sqrt{-\Delta}} \sin(\sqrt{-\Delta}t) + \cos(\sqrt{-\Delta}t) \right] + \frac{l_0}{1-\frac{m\omega_0^2}{k}}}$$

· caso $\left(\frac{c}{2m}\right)^2 = \frac{k}{m} - \omega_0^2 \Rightarrow \Delta = 0$

· En este caso tenemos que $\lambda = \frac{-c}{2m} + 0$ es un autovalor degenerado,

· nuestro nuevo ansatz es: $\rho_H(t) = e^{\lambda t} + t\,e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \rho(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left(A + Bt\right) + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}$$

· Usando las condiciones iniciales:

$$\Rightarrow \rho(0) = A + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}} = l_0 \Rightarrow A = l_0 \underbrace{\left(1 - \frac{1}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}\right)}_{\frac{1 - \frac{m\omega_0^2}{k} - 1}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}} = l_0 \frac{-1}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1}$$

$$\dot{\rho}(0) = \frac{-c}{2m}\underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}}_{1}\left(A + \underbrace{Bt}_{0}\right) + \underbrace{e^{-\frac{c}{2m}t}}_{1} B = 0$$

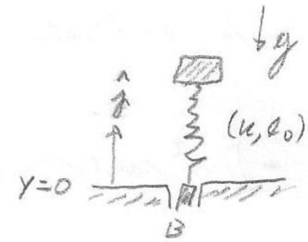
$$\Rightarrow \frac{\frac{c\,l_0}{2m}}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1} + B = 0 \Rightarrow B = \frac{-\frac{c}{2m}}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1}\, l_0$$

y $\dfrac{\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{c}{2m}\right)^2}{\frac{k}{m\omega_0^2} - 1} = 1$ · luego la ec. final queda:

$$\rho(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[-l_0\left(\frac{2m}{c}\right)^2\omega_0^2 - l_0\frac{2m}{c}\omega_0^2 t\right] + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho(t) = -l_0\omega_0^2\,\frac{2m}{c}\,e^{-\frac{c}{2m}t}\left(\frac{2m}{c} - t\right) + \frac{l_0}{1 - \frac{m\omega_0^2}{k}}}$$

P2) a) Posición de equilibrio:



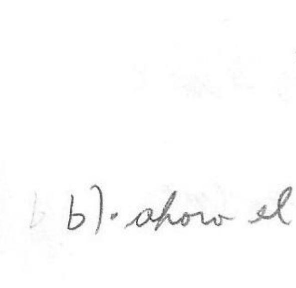
$$\Rightarrow \hat{j}\,] \quad m\ddot{Y} = -mg + k(l_0 - Y)$$

equilibrio en: $\ddot{Y} = 0 \Rightarrow 0 = -mg + k(l_0 - Y)$

$$\Rightarrow \boxed{Y_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}} \quad (1)$$

b). ahora el punto B oscila, por lo que nuestro sistema es no inercial

• Ambos sistemas son cartesianos con $\hat{j} = \hat{j}'$, $\vec{\Omega} = 0$



$$\vec{r}_B = A_0 \sin(\omega t)\,\hat{j} \Rightarrow \boxed{\vec{a}_B = -A_0 \omega^2 \sin(\omega t)\,\hat{j}} \quad (2)$$

• La aceleración del sistema nos da una fuerza ficticia:

$$\hat{j}'\,] \quad m\ddot{Y}' = -mg + k(l_0 - Y') + mA_0\omega^2 \sin(\omega t)$$

Ec. de movimiento

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{Y}' + \frac{k}{m}Y' = \frac{k}{m}l_0 - g + A_0\omega^2 \sin(\omega t)} \quad (3)$$

c). Resolvemos la ec. (3) de la forma: $Y'(t) = Y_h' + Y_p'$

• Ansatz para la homogénea: $Y_h'(t) = e^{\lambda t} \Rightarrow \lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{\frac{-k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4)$$

• Ansatz de la particular: $Y'_p(t) = C + D\,\text{sen}(\omega t)$ con D y C constantes

en (3): $$-D\omega^2 \text{sen}(\omega t) + \frac{K}{m}\left[C + D\,\text{sen}(\omega t)\right] = \frac{K}{m}l_0 - g + A_0\omega^2 \text{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{K}{m}C = \frac{K}{m}l_0 - g \Rightarrow C = l_0 - \frac{mg}{K} \quad (5)$$

$$\text{y} \quad \text{sen}(\omega t)\, D\left[\frac{K}{m} - \omega^2\right] = \text{sen}(\omega t) A_0\omega^2 \Rightarrow D = \frac{A_0\omega^2}{\frac{K}{m} - \omega^2} \quad (6)$$

• Usando (4), (5) y (6) la solución general queda: (con A y B constantes)

$$\Rightarrow Y'(t) = Ae^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t} + l_0 - \frac{mg}{K} + \frac{A_0\omega^2}{\frac{K}{m}-\omega^2}\text{sen}(\omega t)$$

• Condiciones iniciales $Y'(0) = Y_{eq}$, $\dot{Y}'(0) = 0$

$$\Rightarrow Y'(0) = A + B + \cancel{l_0 - \frac{mg}{K}} \overset{(7)}{=} \cancel{l_0 - \frac{mg}{K}} \Rightarrow A + B = 0$$

$$\Rightarrow \dot{Y}'(0) = i\sqrt{\frac{K}{m}}\underbrace{(A - B)}_{2A} + \frac{A_0\omega^3}{\frac{K}{m}-\omega^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2i\sqrt{\frac{K}{m}}A = \frac{-A_0\omega^3}{\frac{K}{m}-\omega^2} \Rightarrow A = \frac{-A_0\omega^3}{2i}\frac{\sqrt{\frac{m}{K}}}{\frac{K}{m}-\omega^2}$$

• Entonces: $$Y'(t) = \frac{-A_0\omega^3\sqrt{\frac{m}{K}}}{\frac{K}{m}-\omega^2}\left(\frac{e^{i\sqrt{\frac{K}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{K}{m}}t}}{2i}\right) + l_0 - \frac{mg}{K} + \frac{A_0\omega^2}{\frac{K}{m}-\omega^2}\text{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{Y'(t) = l_0 - \frac{mg}{K} + \frac{A_0\omega^2}{\frac{K}{m}-\omega^2}\left[\text{sen}(\omega t) - \omega\sqrt{\frac{m}{K}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{K}{m}}t\right)\right]}$$