Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Física

Ejercicio Extra

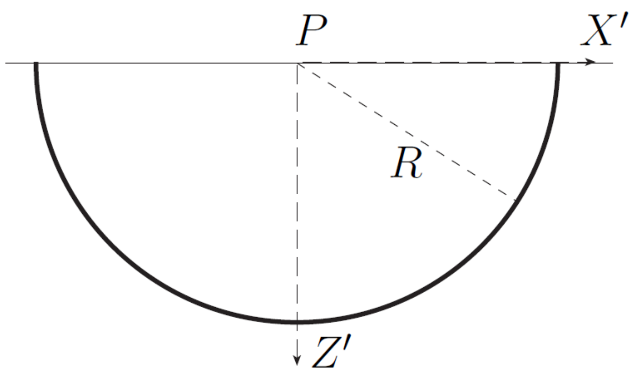
Profesor: Andrés Escala, Profesores Auxiliares: Patricio Venegas A. y Alejandro Escobar N.

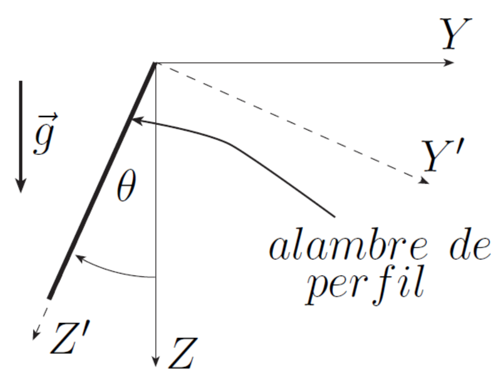
13 de Agosto de 2015. duración: 45 minutos.

Se tiene un alambre ideal (unidimensional) con forma de semicircunferencia de radio R y densidad lineal uniforme $\lambda = M/L$, donde $L = \pi R$ es el largo del alambre y M es su masa.
El alambre está limitado a moverse manteniendo fijos sus extremos.

(a) Calcule la matriz de inercia $I_{ij} = \lambda \int_0^L (r^2\delta_{ij} - x_i x_j) ds$ con respecto al centro de curvatura P. El ds es el elemento de arco.

(b) Determine el torque debido al peso ($\vec{g} = g\hat{k}$, de acuerdo a la figura) y escriba la ecuación dinámica que rige el movimiento de este cuerpo que oscila rotando en torno al eje X. Obtenga la frecuencia angular de las pequeñas oscilaciones.



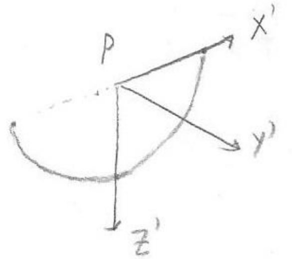


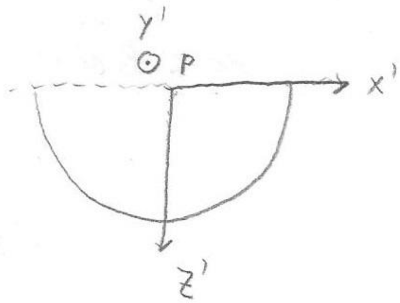
Momento angular: $\vec{L} = I\,\vec{\Omega}$
Torque: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
Ec. de torque: $\dot{\vec{L}} = \sum \vec{\tau}$
Centro de masas: $\vec{r}_G = \frac{1}{M}\int \vec{r}\, dm$

Integrales útiles:
$\int sin^2\phi\ d\phi = \frac{1}{2}(\phi - sin\phi\ cos\phi) + C$
$\int cos^2\phi\ d\phi = \frac{1}{2}(\phi + sin\phi\ cos\phi) + C$
$\int sin\phi\ cos\phi\ d\phi = \frac{1}{2}sin^2\phi + C$

Punto Ejercicio Extra

a) • Calculamos la matriz de inercia con respecto al punto P:

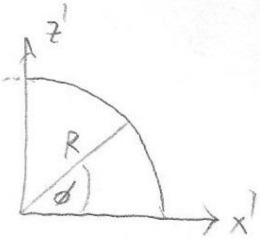




a notar: $y' = 0$ en todo el alambre (1)

$$I_{ij} = \lambda \int (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)\, dS = \lambda \begin{pmatrix} \int (\cancel{y'^2}_0 + z'^2)\, dS & -\cancel{\int x'y'\, dS}_0 & -\int x'z'\, dS \\ -\cancel{\int x'y'\, dS}_0 & \int (x'^2 + z'^2)\, dS & -\cancel{\int z'y'\, dS}_0 \\ -\int x'z'\, dS & -\cancel{\int z'y'\, dS}_0 & \int (x'^2 + \cancel{y'^2}_0)\, dS \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

• Para calcular las integrales podemos usar coordenadas polares:



elemento de arco

$$\Rightarrow \quad x' = R\cos\phi \qquad \Rightarrow \quad x'^2 + z'^2 = R^2 \;,\; dS = R\,d\phi$$
$$z' = R\sin\phi \qquad\qquad \phi \in [0, \pi]$$

$$\bullet \quad I_{xx} = \lambda \int_{\cup} z'^2\, dS = \frac{M}{\pi R} \int_0^{\pi} R^3 \sin^2\phi\, d\phi = \frac{M}{\pi R} \frac{R^3}{2} \left| \phi - \sin\phi\cos\phi \right|_0^{\pi} = \frac{M \cancel{\pi} \cancel{R^3}^{2}}{\cancel{\pi}\, 2 \cancel{R}}$$

densidad homogénea $\lambda = \frac{M}{L} = \frac{M}{\pi R}$

$$\Rightarrow \boxed{I_{xx} = \frac{MR^2}{2}}$$

$$\bullet \quad I_{yy} = \lambda \int_{\cup} (x'^2 + z'^2)\, dS = \frac{M}{\pi R} \int_0^{\pi} R^3\, d\phi = \frac{M \cancel{\pi} \cancel{R^3}^{2}}{\cancel{\pi R}} \Rightarrow \boxed{I_{yy} = MR^2}$$

$$\cdot\ I_{zz} = \lambda \int_U x'^2\, dS = \frac{M}{\pi R}\int_0^{\pi} R^3 \cos^2\phi\, d\phi = \frac{M\cancel{R^3}R^2}{\pi \cancel{R}\, 2} \Big| \phi + \sin\phi \cos\phi \Big|_0^{\pi} = \frac{MR\cancel{\pi}}{2\cancel{\pi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{zz} = \frac{MR^2}{2}}$$

$$\cdot\ I_{xz} = -\lambda \int_U x' z'\, dS = \frac{-M}{\pi R}\int_0^{\pi} R\cos\phi\, R\sin\phi\, R\, d\phi = \frac{-M\cancel{R^3}R^2}{\pi \cancel{R}}\frac{1}{2}\Big|\cancel{\sin^2\phi}\Big|_0^{\pi} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{xz} = 0}$$

· Con esto la matriz de inercia queda:

$$\boxed{I = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix}}$$

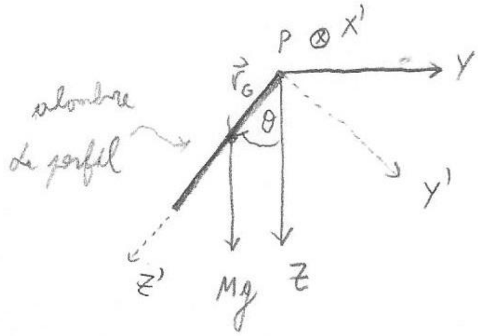
b) · Para determinar el torque del peso debemos ubicar el centro de masa del alambre.

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M}\int_U \vec{r}\, dm = \frac{\lambda}{M}\int_0^{\pi} R\hat{r}\, R\, d\phi = \frac{M R^2}{\pi R M}\int_0^{\pi} (\cos\phi\, \hat{x}' + \sin\phi\, \hat{z}')\, d\phi$$

$$\Rightarrow \qquad = \frac{R}{\pi}\Big| \sin\phi\, \hat{x}' - \cos\phi\, \hat{z}' \Big|_0^{\pi} = \frac{-R}{\pi}(-1-1)\hat{z}' = \frac{2R}{\pi}\hat{z}'$$

$\Rightarrow$ Posición del centro de masa: $\boxed{\vec{r}_G = \frac{2R}{\pi}\hat{z}'}$

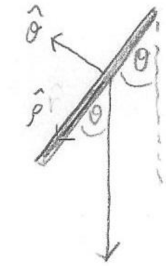
· Ahora podemos hacer un DCL en el centro de masa:



· Torque del peso:

(en polares $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{x}')$)

se cumple $\hat{\rho} = \hat{z}'$
$\hat{\theta} = -\hat{y}'$



$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{Mg} = \vec{r}_G \times M\vec{g} = \frac{2R}{\pi} Mg \; \hat{\rho} \times (\cos\theta \, \hat{\rho} - \sin\theta \, \hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{-2R}{\pi} Mg \sin\theta \, \hat{x}' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau}_{Mg} = \frac{-2R}{\pi} Mg \sin\theta \, \hat{x}'}$$

· momento angular: $\vec{L} = I \vec{\Omega}$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{MR^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{MR^2}{2}\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{\Omega} = \dot{\theta} \, \hat{x}'$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \frac{MR^2}{2} \dot{\theta} \, \hat{x}'}$$

· Ecuación de torque: $\dot{\vec{L}} = \sum \vec{\tau} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{M}R^{\cancel{2}}}{2} \ddot{\theta} = \frac{-2\cancel{R}}{\pi} \cancel{M} g \sin\theta$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{4g}{\pi R} \sin\theta = 0}$$ ec. de movimiento

Equ. en $\theta = 0$ estable con frec. de pequ. oscilaciones: $\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{g}{\pi R}}}$

$$\delta\ddot{\theta} + \omega^2 \delta\theta = 0$$