Mecánica: Clase auxiliar 23

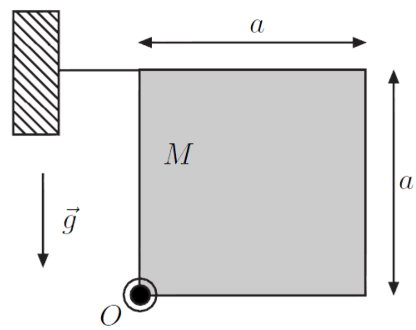
Profesor: Andrés Escala, Profesores Auxiliares: Patricio Venegas A. y Alejandro Escobar N.

3 de Agosto de 2015

Problema 1

Considere una lámina cuadrada homogénea de lado a y masa M que puede girar sin roce alrededor de un eje horizontal fijo y perpendicular a la lámina, que pasa por uno de sus vértices (O). Inicialmente, la lámina se encuentra en reposo sujeta por un hilo, como se indica en la figura adjunta.

(a) Calcular el momento de inercia respecto al eje que pasa por O perpendicular al plano de la lámina.
(b) Calcular la tensión del hilo.
(c) En cierto instante se corta el hilo y la lámina empieza a girar alrededor del eje O. Determinar la velocidad angular máxima que alcanza la lámina.
(d) Encontrar las posiciones de equilibrio y el período de pequeñas oscilaciones en el caso de los equilibrios estables.

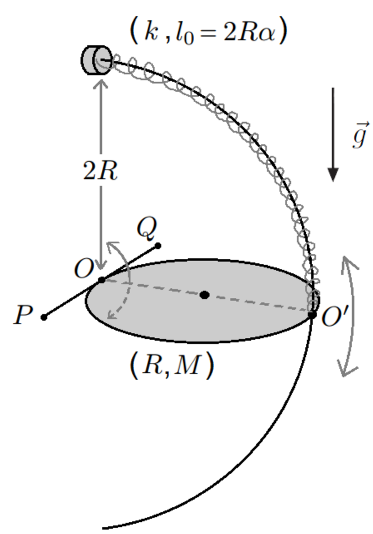


Problema 2

Un disco homogéneo de masa M y radio R puede girar en torno a un eje $\overline{PQ}$ que lo toca tangencialmente en un punto O. En otro punto O' (radialmente opuesto a O) el disco está unido a un resorte que se puede estirar y apretar a través de una guía circunferencial como muestra la figura. El resorte tiene constante elástica k y largo natural $l_0 = 2R\alpha$, con α un factor constante y adimensional. Se pide:

(a) Calcular el momento de inercia del disco respecto al eje $\overline{PQ}$ que pasa por O.

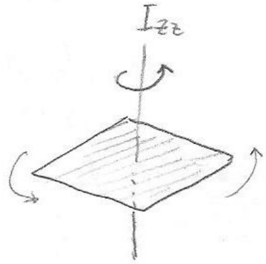
(b) Calcular el valor de α para que el disco horizontal sea un equilibrio estable del sistema y determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones.



Matriz de inercia:	$I_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)dm$
Teorema de Steiner:	$I^P = I^G + Md^2$
Momento angular:	$\vec{L_P} = I_P\vec{\Omega}$

Pauta Aux 23

P1 a) Primero calcularemos el momento de inercia del eje principal que pasa perpendicular al centro de masa de la lámina:



$$I^G_{ij} = \int (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)\, dm$$ nos interesa el caso $i=j=z$

$$\Rightarrow \quad I^G_{zz} = \int_{\square} (x^2+y^2)\, dx\, dy\, \sigma$$

densidad uniforme:

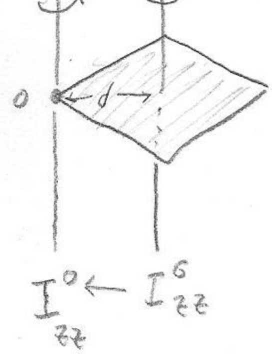
$$M = \int dm = \sigma \int dA = \sigma a^2 \Rightarrow \sigma = \frac{M}{a^2}$$

$$\Rightarrow \quad I^G_{zz} = \frac{M}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (x^2+y^2)\, dx\, dy$$

$$= \frac{2M}{a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x^2\, dx = \frac{8M}{a^2}\left(\frac{a}{2}-0\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 - 0\right) \Rightarrow \boxed{I^G_{zz} = \frac{Ma^2}{6}} \quad (1)$$

· Usando el teorema de Steiner podemos pasar a cualquier eje paralelo al anterior, por ejemplo uno que toque el punto O.

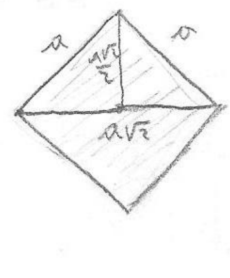
$$I^O_{zz} = I^G_{zz} + Md^2$$, d es la separación entre los ejes



$$\Rightarrow \quad I^O_{zz} \overset{(1)}{=} \frac{Ma^2}{6} + Ma^2\frac{\cancel{2}}{\cancel{4}_2}$$

$$= Ma^2\left(\frac{1}{6} + \frac{3}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I^O_{zz} = \frac{2Ma^2}{3}} \quad (2)$$



$d = a\frac{\sqrt{2}}{2}$

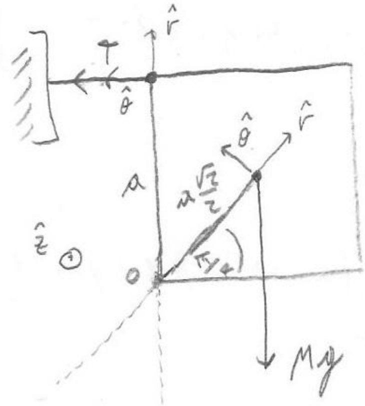
b) • Para calcular la tensión del hilo usamos la ec. de torque:

$$\dot{\vec{L}}_0 = \sum \vec{\tau}_0$$ ec. de torque con respecto al punto O.

• Como la lámina no se está moviendo ni girando entonces su momento angular es nulo: $\Rightarrow \quad \vec{L} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0$

• El torque total en el sólido está dado por:

$$\sum \vec{\tau}_0 = \vec{\tau}^{\,0}_{Mg} + \vec{\tau}^{\,0}_{T}$$



(hacemos torque c/r a O en un sistema cilíndrico $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$)

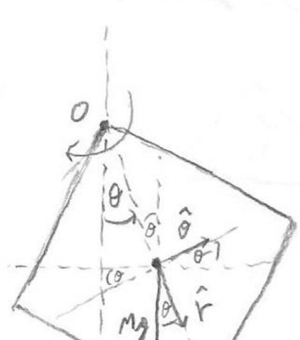
cos $\frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad = \frac{a\sqrt{2}}{2}\hat{r} \times Mg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{r} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\theta}\right)$$

$$+ \, a\hat{r} \times T\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \vec{0} = \sum \vec{\tau}_0 = -\frac{a}{2}Mg\,\hat{z} + aT\hat{z} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{Mg}{2}}$$

c) • Analicemos de la cuerda ahora que está cortada. Usamos el sistema cilíndrico para llegar a una ec. para el movimiento del centro de masa.



• Ahora sólo el peso hace torque:

$$\sum \vec{\tau}_0 = \vec{\tau}^{\,0}_{Mg} = \frac{a\sqrt{2}}{2}\hat{r} \times Mg(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}^{\,0}_{Mg} = -\frac{a\sqrt{2}}{2}Mg\sin\theta\,\hat{z}} \quad (3)$$

• Esta vez el sólido se mueve y acelera angularmente $\Rightarrow$ $\dot{\vec{L}} \neq 0$

• El momento angular de un sólido rígido: $\vec{L}_0 = \vec{\vec{I}}_0 \vec{\Omega}_0$

(todo c/r a O)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^0_{xx} & I^0_{xy} & I^0_{xz} \\ I^0_{xy} & I^0_{yy} & I^0_{yz} \\ I^0_{xz} & I^0_{yz} & I^0_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

velocidad angular en $\hat{z}$

• La lámina sólo gira c/r a $\hat{z}$ $\Rightarrow$ $\Omega_x = \Omega_y = 0$, $\Omega_z = \dot{\theta}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & // & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} I^0_{zz} \end{pmatrix} \overset{(2)}{\Rightarrow} \boxed{L_z = \frac{2Ma^2}{3}\dot{\theta}} \quad (4)$$

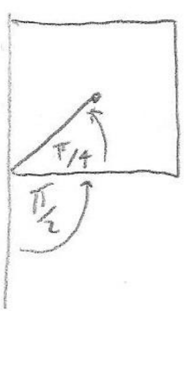
• La ec. de torque es: $\dot{\vec{L}}_0 = \sum \vec{\tau}_0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{L}_x \\ \dot{L}_y \\ \dot{L}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum \tau_x \\ \sum \tau_y \\ \sum \tau_z \end{pmatrix} \overset{(3) \text{ y } (4)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2Ma^2}{3}\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vec{\tau}^{\,0}_{Mg} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{2Ma^2}{3}\ddot{\theta} = -\frac{a\sqrt{2}}{2} Mg \sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{3\sqrt{2}\, g}{4a} \sin\theta} \quad (5)$$

• Integramos (5) con la condición inicial:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{y reposo} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$$



$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cancel{\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} \cos\frac{\pi}{4}} - \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} \underbrace{\sin\frac{\pi}{4}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\dot\theta} \dot\theta\, d\dot\theta = \frac{-3\sqrt{2}g}{4a}\int_{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \Rightarrow \frac{\dot\theta^2}{2} - 0 = \frac{3\sqrt{2}g}{4a}\left(\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- El máximo de la velocidad está en $\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} = 0$. Derivamos la expresión:

$$\Rightarrow 2\dot\theta\frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} = -\frac{3\sqrt{2}g}{4a}\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \frac{\partial\dot\theta}{\partial\theta} = 0 = \operatorname{sen}\theta \Rightarrow \begin{matrix}\theta = 0 \\ \theta = \pi\end{matrix} \text{ (Extremos)}$$

- Por conservación de energía $\theta = 0$ debe ser un máximo y π un mínimo. (tienen sentido físico)

$$\Rightarrow \dot\theta^2_{max} = \dot\theta^2(0) = \frac{3\sqrt{2}g}{2a}\left(\cos 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\dot\theta^2_{max} = \frac{3\sqrt{2}g}{2a}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

d) - Los equilibrios salen de hacer $\dot\theta = \ddot\theta = 0$ en (5):

$$(5) \Rightarrow \ddot\theta + \frac{3\sqrt{2}}{4a}g\operatorname{sen}\theta = 0 \underset{\ddot\theta = 0}{\Rightarrow} \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi\end{matrix}} \text{ equilibrios}$$

- Estabilidad: $\theta = \theta_2 + \delta\theta$, $\ddot\theta = \delta\ddot\theta$ $\Rightarrow \operatorname{sen}(\pi + \delta\theta) = \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}\pi\cos\delta\theta}}_{0} + \underbrace{\cos\pi}_{-1}\underbrace{\operatorname{sen}\delta\theta}_{\delta\theta} = -\delta\theta$

$$\Rightarrow \delta\ddot\theta - \frac{3\sqrt{2}}{4a}g\,\delta\theta = 0 \Rightarrow \boxed{\theta_2 = \pi \text{ es eq inestable}}$$

$\theta = \theta_1 + \delta\theta$, $\ddot\theta = \delta\ddot\theta$ $\Rightarrow \operatorname{sen}(\delta\theta) = \delta\theta \Rightarrow \delta\ddot\theta + \underbrace{\frac{3\sqrt{2}g}{4a}}_{\omega^2}\delta\theta = 0$

frecuencia de pequeñas oscilaciones

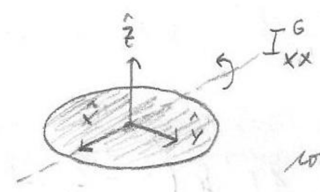
$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$ periodo de P.O.

$$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = 0 \text{ es eq estable}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\cdot 2\sqrt{\frac{a}{3\sqrt{2}g}} \Rightarrow \boxed{T = 4\pi\sqrt{\frac{a}{3\sqrt{2}g}}}$$

P2

a) • Calculamos el momento de inercia en un eje que atraviesa diametralmente al disco.



$$I^G_{xx} = \int_{\circ} (y^2 + \cancel{z^2})\, dx\, dy\, \sigma$$

$z = 0$ es un disco plano

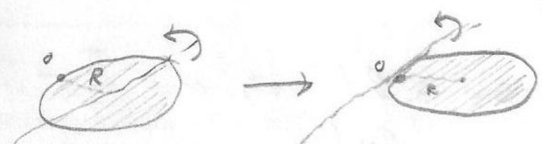
cambio $(x, y) \to (\rho, \phi)$

coord polares $= \dfrac{M}{\pi R^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho^2 \sin^2\phi\, \rho\, d\phi$

$$\Rightarrow I^G_{xx} = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\, d\phi$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\left|\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R \frac{1}{2}\left|\theta + \sin\theta\cos\theta\right|_0^{2\pi} = \frac{MR^4}{\pi R^2\, 8}\, 2\pi = \frac{MR^2}{4}$$

• usando el teorema de Steiner: $I^O_{xx} = I^G_{xx} + MR^2 = \dfrac{MR^2}{4} + MR^2 = \dfrac{5}{4}MR^2$



$$\Rightarrow \boxed{I^O_{xx} = \frac{5MR^2}{4}} \quad (1)$$

b) Para ser equilibrista necesitamos una ec. de movimiento, usamos ec. de torque:

$$\dot{\vec{L}}_O = \sum \vec{\tau}_O \quad (\text{c/r al punto } O)$$

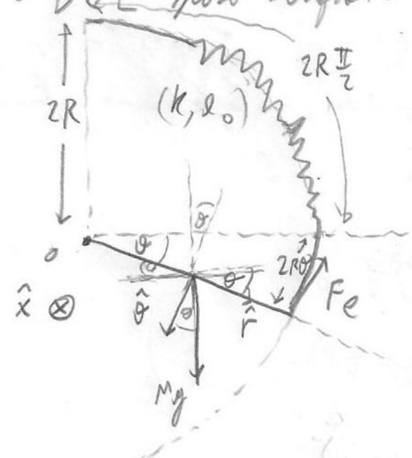
• Usamos coordenadas "cilíndricas" con origen O y eje $(\hat r, \hat\theta, \hat x)$

• El eje x está dado por la recta $\overline{PQ}$, como el disco gira sólo en torno a este eje se tiene:

$$\vec{\Omega} = \dot\theta\, \hat x \Rightarrow \vec{L}_O = \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \overleftrightarrow{I}_O\, \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} I^O_{xx} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^O_{xx}\dot\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}}_O = \frac{5}{4}MR^2\ddot\theta\, \hat x} \quad (2)$$

• DCL para torque: (mirado de lado)



$$\sum \vec{\tau}_o = \vec{\tau}_{Mg} + \vec{\tau}_{Fe}$$

$$\vec{\tau}_{Mg} = R\,\hat{r} \times Mg\,(\cos\theta\,\hat{\theta} + \sin\theta\,\hat{r})$$

$$\boxed{\vec{\tau}_{Mg} = RMg\cos\theta\,\hat{x}} \quad (3)$$

$$\vec{\tau}_{Fe} = 2R\,\hat{r} \times k\,(\underbrace{l_0}_{2R\alpha} - 2R\frac{\pi}{2} - 2R\theta)\hat{\theta} = 4R^2k\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\tau}_{Fe} = 4R^2k\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \theta\right)\hat{x}} \quad (4)$$

• Usando (2), (3) y (4) en la ec. de torque:

$$\Rightarrow \frac{5}{4}MR^2\ddot{\theta} = MR^2\left[\frac{4k}{M}\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \theta\right) + \frac{g}{R}\cos\theta\right] \quad (5)$$

• Suponemos equilibrio en $\theta = 0$ en (5)

$$\Rightarrow 0 = \frac{4k}{M}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{g}{R} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{gM}{4kR} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{gM}{4kR}}$$

• Pequeñas oscilaciones: $\theta = 0 + \delta\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \delta\ddot{\theta}$, $\cos\delta\theta = 1$

$$\frac{4}{5}(5) \Rightarrow \delta\ddot{\theta} - \frac{16k}{5M}\left(\alpha - \frac{\pi}{2} - \delta\theta\right) - \frac{4g}{5R} = 0$$ usando el valor de α

$$\Rightarrow \delta\ddot{\theta} + \underbrace{\frac{16k}{5M}}_{\omega^2}\delta\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{16k}{5M}$$

ω^2 frecuencia de pequ. osc.

$$\Rightarrow \boxed{\omega = 4\sqrt{\frac{k}{5M}}}$$