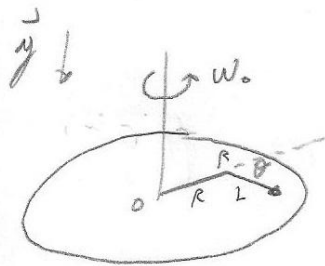
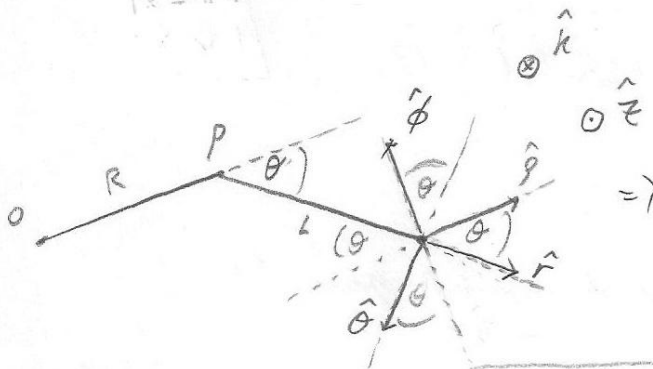


Punto P 1, C 3



SI : cilíndrico $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{z})$, origen en O,
 SNI : cilíndrico $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{k})$, origen en P.

• Relación de los vectores unitarios :



$$\hat{\rho} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta \quad (1)$$

$$\hat{\phi} = -\hat{r} \sin \theta - \hat{\theta} \cos \theta$$

$$\hat{z} = -\hat{k}$$

+0.5

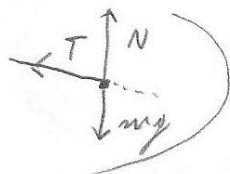
• aceleración del sistema :
 y rel. rec. unitarios

$$\vec{A} = -\omega_0^2 R \hat{\rho}, \quad \vec{\omega} = \omega_0 \hat{z} \quad (2) \quad +0.5$$

• Posición, velocidad y aceleración relativa :

$$\vec{r}' = L \hat{r}, \quad \vec{v}' = L \dot{\theta} \hat{\theta}, \quad \vec{a}' = -L \dot{\theta}^2 \hat{r} + L \ddot{\theta} \hat{\theta} \quad (3) \quad +0.5$$

• PCL :



$$\vec{F} = m g \hat{k} - N \hat{k} - T \hat{r} \quad (4) \quad +0.5$$

a) • escribiendo las fuerzas anteriores :

$$-m \vec{A} = \omega_0^2 m R (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \quad (5)$$

(2) y (1)

$$\cdot \quad -m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \stackrel{(1), (2), (3)}{\downarrow} = -m \omega_0^2 L \hat{k} \times (\underbrace{\hat{k} \times \hat{r}}_{\hat{\theta}})$$

$$\Rightarrow \boxed{-m \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') = m L \omega_0^2 \hat{r}} \quad (6) \quad \boxed{+0.5}$$

$$\cdot \quad -m 2\vec{\Omega} \times \vec{r}' = 2m \omega_0 L \dot{\theta} (\hat{k} \times \hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \boxed{-2m \vec{\Omega} \times \vec{r}' = -2m \omega_0 L \dot{\theta} \hat{r}} \quad (7) \quad \boxed{+0.5}$$

$$\cdot \quad -m \frac{\dot{\vec{\Omega}}}{0} \times \vec{r}' = 0$$

• Mando todo lo anterior en la ec. de movimiento para SNI:

$$\Rightarrow -m L \dot{\theta}^2 \hat{r} + m L \ddot{\theta} \hat{\theta} = m g \hat{k} - N \hat{k} - T \hat{r} + m \omega_0^2 R \cos \theta \hat{r} - m \omega_0^2 R \sin \theta \hat{\theta} + m L \omega_0^2 \hat{r} - 2 m \omega_0 L \dot{\theta} \hat{r} \quad (8)$$

• Ecuación de movimiento en θ :

$$\frac{1}{mL} (8) \cdot \hat{\theta} / \quad \boxed{\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \frac{R}{L} \sin \theta} \quad (8)$$

• El equilibrio se da en $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$ en (8):

$$\Rightarrow 0 = -\omega_0^2 \frac{R}{L} \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{equilibrio:} \\ \theta_1 = 0 \\ \theta_2 = \pi \end{array}} \quad (9)$$

• Hacemos pequeños oscilaciones en (8):

$$\theta = \theta_{eq} + \delta\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\delta\theta}, \quad \sin(\theta_{eq} + \delta\theta) = \underbrace{\sin \theta_{eq}}_0 + \underbrace{\cos \theta_{eq}}_1 \delta\theta + \underbrace{\sin \delta\theta \cos \theta_{eq}}_{\delta\theta}$$

$$\Rightarrow \ddot{\delta\theta} + \frac{\omega_0^2 R}{L} \cos(\theta_{eq}) \delta\theta = 0$$

• now $\theta_{eq} = \theta_1 = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 = 1$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{\frac{\omega_0^2 R}{L}}_{>0} \delta\theta = 0$$

$\theta_1 = 0$ es eq. estable!

con frecuencia de P.O.

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{\frac{R}{L}}$$

+1.0

• now $\theta_{eq} = \theta_2 = \pi \Rightarrow \cos \theta_2 = -1$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} - \underbrace{\frac{\omega_0^2 R}{L}}_{<0} \delta\theta = 0$$

$\theta_2 = \pi$ es eq.

inestable

+0.5

b) Podemos integrar la ec. (8): $\ddot{\theta} = \dot{\theta} \frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{\omega_0^2 R}{L} \sin \theta$

• dar condiciones iniciales con $\theta(t=0) = 180^\circ = \pi$ y decir que se da una pequeña velocidad horizontal $\varepsilon \Rightarrow v'(t=0) = L\dot{\theta}(t=0) = \varepsilon$

$$\Rightarrow \int_{\varepsilon/L}^{\dot{\theta}} \dot{\theta} d\dot{\theta} = -\frac{\omega_0^2 R}{L} \int_{\pi}^{\theta} \sin \theta d\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^2 = \frac{R}{L} \omega_0^2 |\cos \theta|_{\pi}^{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{L}\right)^2 + \frac{R}{L} \omega_0^2 (\cos \theta + 1) \quad (10)$$

• no interesa saber $\dot{\theta}$ en $\theta=0$ y decir que la perturbación es muy pequeña podemos hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ (esto es válido porque $\theta=\pi$ es eq. inestable, por lo que una perturbación pequeña basta para que la partícula salga de ese punto)

$$(10) \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{L} \right)^2 + \frac{2R}{L} \omega_0^2 \Rightarrow \dot{\theta}(0) = +2\omega_0 \sqrt{\frac{R}{L}} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \vec{v}' = L \dot{\theta} \hat{\theta} \Rightarrow v'(0) = L \dot{\theta}(0) = 2\omega_0 \sqrt{RL} \quad \begin{array}{l} \text{(velocidad)} \\ \text{(rapidez)} \end{array}$$

solución con
(+) porque se
mueve a favor de θ .

$$\Rightarrow \boxed{v'(0) = 2\omega_0 \sqrt{RL}} \quad \begin{array}{l} \text{rapidez relativa en } \theta=0 \\ (12) \end{array}$$

, insertar (11) en (8) $\cdot \hat{r}$:

+0.5

$$-mL\dot{\theta}^2 = -T + m\omega_0^2 R \cos \theta + mL\omega_0^2 - 2m\omega_0 L \dot{\theta}$$

, evaluando en $\theta=0$:

$$\Rightarrow T = m\omega_0^2 R + mL\omega_0^2 + mL \frac{4R}{L} \omega_0^2 - 4m\omega_0^2 \sqrt{RL}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(0) = m\omega_0^2 (L + 5R - 4\sqrt{RL})} \quad (13) \quad \text{+0.5}$$

función en $\theta=0$:

c) repetimos los cálculos de la parte (b), pero esta vez la perturbación es $\dot{\theta}(\pi) = -\frac{\epsilon}{L}$. De todo forma esto no altera la integración por $\dot{\theta}^2$ es siempre o negativo. Lo que sí cambia es la elección de signo (-) en (11), porque ahora la partícula gira en sentido de θ .

$$\Rightarrow \dot{\theta}(0) = -2\omega_0 \sqrt{\frac{R}{L}} \Rightarrow \boxed{v'(0) = -2\omega_0 \sqrt{RL}}$$

, y para la función solo cambia los signos:

ahí bien la velocidad es con (-),
la rapidez es la misma.

$$\Rightarrow \boxed{T(0) = m\omega_0^2 (L + 5R + 4\sqrt{RL})} \quad \text{+0.5}$$