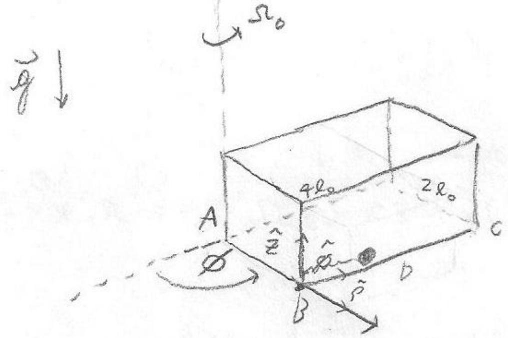
Pauta Aux 21

P1

• Consideramos un sistema inercial con origen en A y coord. cilíndricas $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$



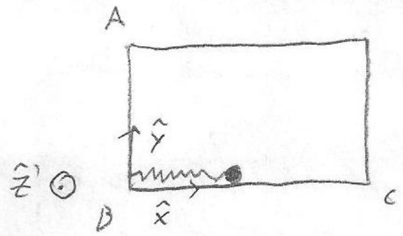
• En este sistema el punto B se mueve de la forma:

$$\vec{R} = 2l_0\hat{\rho} \Rightarrow \vec{V} = 2l_0\dot{\phi}\hat{\phi} = 2l_0\Omega_0\hat{\phi}$$

constante!

$$\Rightarrow \ddot{\phi} = 0, \quad \boxed{\vec{A} = -2l_0\Omega_0^2\hat{\rho}} \quad (1)$$

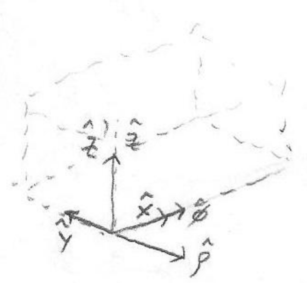
• Colocamos un SNI con origen en B y coord. cartesianas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}')$:



• Con esto la posición de la partícula es simplemente:

$$\boxed{\vec{r}' = x\hat{x} \Rightarrow \vec{v}' = \dot{x}\hat{x} \Rightarrow \vec{a}' = \ddot{x}\hat{x}} \quad (2)$$

• La relación entre los vectores unitarios de ambos sistemas es:



$\Rightarrow$
$$\hat{\rho} = -\hat{y}, \quad \hat{\phi} = \hat{x}, \quad \hat{z} = \hat{z}'$$

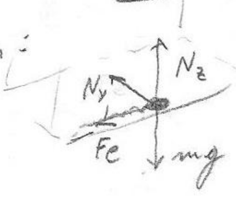
y la velocidad angular de los ejes es: $\vec{\Omega} = \Omega_0\hat{z} \Rightarrow \dot{\vec{\Omega}} = 0$ (3)

a) Para analizar estabilidad necesitamos la ec. de movimiento en el SNI:

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A} - m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}') - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - \underbrace{\cancel{m\dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r}'}}_{0} \quad (4)$$

• $\vec{F}$ son las fuerzas reales:

DCL



$$\longrightarrow \boxed{\vec{F} = N_z\hat{z} - mg\hat{z} - k(x - l_0)\hat{x} + N_y\hat{y}} \quad (5)$$

· Ahora colocamos (1), (2), (3) y (5) en (4); pero antes calculemos las fuerzas ficticias:

$$-m\vec{A} = -(-m\,2l_0\Omega_0^2\hat{\rho}) = -m\,2l_0\Omega_0^2\hat{Y}$$

$$-m\vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r}\,') = -m\Omega_0^2\,\hat{z}\times(\hat{z}\times(X\hat{X})) = -m\Omega_0^2 X(\hat{z}\times\hat{Y}) = m\Omega_0^2 X\hat{X}$$

$$-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}\,' = -2m\Omega_0\,\hat{z}\times\dot{X}\hat{X} = -2m\Omega_0\dot{X}\hat{Y}$$

$$\Rightarrow (4) \Leftrightarrow \quad m\ddot{X}\hat{X} = N_z\hat{z} + N_y\hat{Y} - mg\hat{z} - k(X-l_0)\hat{X} - 2m\,l_0\Omega_0^2\hat{Y} + m\Omega_0^2X\hat{X} - 2m\Omega_0\dot{X}\hat{Y}$$

$$(4)\cdot\hat{z} \Rightarrow \quad N_z = mg$$

$(4)\cdot\hat{Y}$ lo usaremos en la parte (b).

$$(4)\cdot\hat{X} \Rightarrow \boxed{m\ddot{X} = -k(X-l_0) + m\Omega_0^2 X} \quad (5)$$

· La ec. (5) nos dice cómo se mueve la partícula en el SNI. Si hacemos $\ddot{X}=0$ y $\dot{X}=0$ en (5) obtendremos un equilibrio relativo "X_{eq}", el cual es un equilibrio visto desde el SNI, pero desde afuera la partícula sigue moviéndose visto desde el sistema inercial (ρ,ϕ,z).

$$\ddot{X}=0 \text{ en } (5) \Rightarrow \quad 0 = -k(X_{eq}-l_0) + m\Omega_0^2 X_{eq}$$

· Por enunciado, queremos saber el valor de Ω_0, tal que el punto D $(X=2l_0)$ sea equilibrio relativo:

$$X_{eq} = 2l_0 \Rightarrow \quad m\,2\cancel{l_0}\Omega_0^2 = k(2l_0-l_0) = k\cancel{l_0}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}} \quad (6)$$

· Con esto tenemos que el punto D es equilibrio, pero además queremos que sea estable, por lo que hacemos pequeñas oscilaciones:

$$x = x_{eq} + \delta x \Rightarrow \dot{x} = \delta\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} = \delta\ddot{x} \quad \text{en (5)}$$

$\Rightarrow$

$$m\,\delta\ddot{x} = (2l_0 + \delta x)(m\Omega_0^2 - k) + k l_0$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{x} = 2l_0\Omega_0^2 - \frac{2l_0 k}{m} + \delta x\left(\Omega_0^2 - \frac{k}{m}\right) + \frac{k l_0}{m}$$

$$\Rightarrow \delta\ddot{x} + \left(\frac{k}{m} - \Omega_0\right)\delta x = 2l_0\Omega_0^2 - \frac{k l_0}{m}$$

y aquí si $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ el lado derecho se anula (tenía que ser así porque hacemos pequeñas oscilaciones!) y en el izquierdo lo que acompaña a δx queda positivo (estable!)

frecuencia de pequeñas oscilaciones

$$\Rightarrow \delta\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{2m}}_{\omega^2}\delta x = 0 \qquad \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}}$$

b) Ahora queremos una condición para la normal (ecuación $(4)\cdot\hat{y}$) en $\hat{y}$:

$$(4)\cdot\hat{y} \Rightarrow \boxed{0 = N_y - 2ml_0\Omega_0^2 - 2m\Omega_0\dot{x}} \quad (7)$$

· $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{2m}}$ ahora es dato, pero nos falta $\dot{x}$. Para ello usamos (5):

$$(5) \Rightarrow m\ddot{x} = -kx + kl_0 + \frac{kx}{2} = kl_0 - \frac{kx}{2}$$

$$\Rightarrow \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = \frac{k}{m}\left(l_0 - \frac{x}{2}\right)$$

integramos

· Por enunciado las condiciones iniciales son "desde el reposo en C"

$$\Rightarrow \quad x(t=0) = 4l_0 \quad y \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = \frac{k}{m}\int_{4l_0}^{x} \left(l_0 - \frac{x}{2}\right) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{x}^2}{2} - 0 = \frac{k}{m}\left| l_0 x - \frac{x^2}{4} \right|_{4l_0}^{x}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}^2 = \frac{2k}{m}\left(l_0 x - \cancel{4l_0^2} - \frac{x^2}{4} + \cancel{\frac{16 l_0^2}{4}} \right)$$

· El signo (−) es porque en estas condiciones iniciales la partícula sólo puede ir en dirección $-\hat{x}$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{x}(x) = -\sqrt{\frac{2k}{m}\, x\left(l_0 - \frac{x}{4}\right)}} \quad (8)$$

· como la caja exige $x \in [0, 4l_0]$ $\Rightarrow$ el radicando siempre es positivo $\Rightarrow$ $\dot{x}$ es real.

· usando (7) en (8) tenemos:

$$N_y = 2m\left(l_0 \Omega_0^2 + \Omega_0 \dot{x}(x) \right)$$

$$\Rightarrow \quad N_y = 2m\left(l_0 \frac{k}{2m} - \sqrt{\frac{k}{2m}}\sqrt{\frac{2k}{m}}\sqrt{x\left(l_0 - \frac{x}{4}\right)} \right) = 2k\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}\left(\frac{l_0}{2} - \sqrt{x\left(l_0 - \frac{x}{4}\right)} \right)$$

· y la condición de despegue es $N_y = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{l_0}{2} = \sqrt{x\left(l_0 - \frac{x}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_0^2}{4} = x l_0 - \frac{x^2}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} + 2l_0 x - \frac{l_0^2}{2} = 0 \qquad \text{solución: } x' = -2l_0 \pm \sqrt{4l_0^2 + l_0^2}$$

· como $x > 0$ $\Rightarrow$ solución con (+) $\Rightarrow$ $x' = -2l_0 + \sqrt{5 l_0^2}$

$\Rightarrow$ la partícula se despega en: $\boxed{x_{despegue} = l_0(\sqrt{5} - 2)}$